



**TESIS – SM 142501**

**PELABELAN TOTAL SUPER ANTIMAGIC PADA  $d$ -  
MUKA BIDANG DARI HASIL KORONA GRAF  
FRIENDSHIP DENGAN GRAF LINTASAN**

**VICARDY KEMPA  
NRP. 1214 201 009**

**DOSEN PEMBIMBING  
Dr. Darmaji, S.Si., M.T**

**PROGRAM MAGISTER  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER  
SURABAYA  
2016**



---

**THESIS - SM 142501**

**SUPER TOTAL ANTIMAGIC LABELING  $d$ -FACE  
FROM CORONA RESULTS OF FRIENDSHIP GRAPH  
WITH PATH GRAPH**

**VICARDY KEMPA  
NRP. 1214 201 009**

**SUPERVISOR  
Dr. DARMAJI, S.Si., M.T**

**MASTER'S DEGREE  
MATHEMATICS DEPARTMENT  
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES  
SEPULUH NOVEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY  
SURABAYA  
2016**


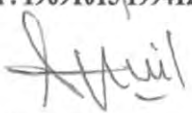


**PELABELAN TOTAL SUPER ANTIMAGIC PADA  
d-MUKA BIDANG DARI HASIL KORONA GRAF  
FRIENDSHIP DENGAN GRAF LINTASAN**

Tesis disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar  
Magister Sains (M.Si.)  
di  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

oleh:  
**VICARDY KEMPA**  
NRP. 1214 201 009

Tanggal Ujian : 19 Juli 2016  
Periode Wisuda: September 2016

Disetujui oleh:

- 
1. **Dr. Darmaji, S.Si., M.T.** (Pembimbing)  
NIP. 19691015-199412 1 001
- 
2. **Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si.** (Penguji)  
NIP. 19660414 199102 2 001
- 
3. **Dr. Chairul Imron, Ml.Komp.** (Penguji)  
NIP. 19611115 198703 1 003
- 
4. **Endah Rokhmah M.P., S.Si., M.T., Ph.D.** (Penguji)  
NIP. 19761213 200212 2 001

Direktur Program Pascasarjana,



# PELABELAN TOTAL SUPER ANTIMAGIC PADA $d$ -MUKA BIDANG DARI HASIL KORONA GRAF FRIENDSHIP DENGAN GRAF LINTASAN

Nama Mahasiswa : Vicardy Kempa

NRP : 1214201009

Dosen Pembimbing : Dr. Darmaji, S.Si., M.T

## ABSTRAK

Pelabelan total super antimagic pada  $d$ -muka bidang adalah pelabelan pada titik, sisi dan muka bidang, dengan bobot muka bidang membentuk barisan aritmatika atau dengan kata lain sebuah graf  $G$  disebut mempunyai pelabelan total super  $d$ -muka bidang antimagic jika terdapat fungsi bijektif sehingga bobot muka bidangnya memenuhi barisan aritmatika. Bobot muka bidang yang dimaksud adalah bobot muka pada setiap bidang yang ada pada hasil korona dua buah graf. Pada penelitian ini graf yang dilabeli adalah hasil korona dari graf friendship dan graf lintasan dengan  $m$  bilah dan order  $n$ , dimana  $m \geq 3$  dan  $n = 2, n = 3$ .

**Kata kunci:** *Pelabelan, Pelabelan total super antimagic, korona, bobot muka bidang.*

# **SUPER TOTAL ANTIMAGIC $d$ -FACE LABELING FROM CORONA RESULTS OF FRIENDSHIP GRAPH WITH PATH GRAPH**

Name : Vicardy Kempa

NRP : 1214 201 009

Supervisor : Dr. Darmaji, S.Si., M.T

## **ABSTRACT**

Super total antimagic  $d$ -face labeling is a vertex labeling, edge labeling and face labeling, which the face weight forms arithmetic sequence. That  $G$  has super total antimagic  $d$ -face labeling if there is a bijection function, so face weight forms the arithmetic sequence. The face weight is the weight of face of corona. In this study, the labeling graph is the result of corona of friendship graph and path graph, where  $m \geq 3$  for friendship graph  $F_m$  and  $n = 2, n = 3$  for path graph  $P_n$

**Keywords:** *Labeling, Super Total Antimagic Labeling, Corona, Weight of face*

## DAFTAR ISI

LEMBARAN PENGESAHAN.....	v
ABSTRAK.....	vii
ABSTRACT.....	ix
DAFTAR ISI.....	xi
DAFTAR GAMBAR.....	xiii
BAB 1. PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang Masalah.....	2
1.2 Rumusan Masalah.....	3
1.3 Batasan Masalah.....	3
1.4 Tujuan Penelitian .....	3
1.5 Manfaat Penelitian.....	3
BAB 2. KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI.....	5
2.1 Teori Graf.....	5
2.1.1 Pengertian Teori Graf.....	5
2.1.2 Jenis-Jenis Graf.....	6
2.1.3 Operasi pada graf.....	9
2.2 Terminologi Dasar Graf.....	10
2.3 Pemetaan.....	13
2.3.1 Defenisi Pemetaan.....	13
2.4 Pelabelan Graf.....	14
BAB 3. METODE PENELITIAN.....	17
3.1 Tahapan Penelitian.....	17
BAB 4. HASIL dan PEMBAHASAN.....	19
4.1 Bentuk Umum Graf $F_m \odot P_n$ .....	19
4.2 Penentuan nilai $d$ yang mungkin pada $F_m \odot P_n, m \geq 3$ dan $n = 2, n = 3$ .....	20
4.3 Pelabelan total super antimagic pada $d$ -muka bidang dari $F_m \odot P_n, m \geq 3$ dan $n = 2, n = 3$ .....	24
BAB 5 KESIMPULAN dan SARAN.....	37

5.1 Kesimpulan.....	37
5.2 Saran.....	37
DAFTAR PUSTAKA.....	39

## DAFTAR GAMBAR

	Hal
Gambar 1    Bentuk Graf $G$ .....	5
Gambar 2    Graf Lintasan.....	7
Gambar 3    Graf Sikel.....	8
Gambar 4    Graf Lengkap.....	8
Gambar 5    Graf Friendship.....	9
Gambar 6    Graf Yang Digunakan Untuk Menjelaskan Terminologi Pada Graf.....	10
Gambar 7    Graf Nol $N_5$ .....	12
Gambar 8    Contoh Pelabelan Simpul, Pelabelan Sisi, dan Pelabelan Super Total Pada Graf.....	14
Gambar 9    Contoh Pelabelan Total Pada Graf.....	15
Gambar 10   Bentuk Umum Graf $F_m \odot P_2$ .....	19
Gambar 11   Bentuk Umum Graf $F_m \odot P_2$ .....	19
Gambar 12   Graf $G = F_4 \odot P_2$ .....	20
Gambar 13   Pasangan Bilangan Pada Kelompok Pertama dan Kedua.....	25
Gambar 14   Pasangan Bilangan Pada Kelompok Pertama dan Kedua, $G = F_4 \odot P_2$ .....	26
Gambar 15   Konstruksi Pemberian Label Simpul pada $G = F_4 \odot P_2$ .....	26
Gambar 16   Konstruksi Pemberian Label Sisi pada $G = F_4 \odot P_2$ .....	28
Gambar 17   Pelabelan Total Super Antimagic pada $d$ -muka bidang, $G = F_4 \odot P_2$ .....	28
Gambar 18   Graf $G = F_4 \odot P_3$ .....	30
Gambar 19   Konstruksi Pelabelan Simpul yang Pertama pada $G = F_4 \odot P_3$ ....	31
Gambar 20   Konstruksi Pelabelan Simpul Seluruhnya pada $G = F_4 \odot P_3$ .....	32
Gambar 21   Konstruksi Pelabelan Sisi bagian pertama pada $F_4 \odot P_3$ .....	33
Gambar 22   Konstruksi Pelabelan Sisi Bagian Kedua pada $F_4 \odot P_3$ .....	34
Gambar 23   Konstruksi Pelabelan Sisi Bagian Ketiga pada $F_4 \odot P_3$ .....	34
Gambar 24   Konstruksi Pelabelan Sisi Seluruhnya pada $F_4 \odot P_3$ .....	35
Gambar 25   Pelabelan Total Super Antimagic pada $d$ -Muka Bidang, $G = F_4 \odot P_3$ .....	36



# BAB 1

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler seorang matematikawan berkebangsaan Swiss pada tahun 1736 melalui tulisan Euler yang berisi tentang upaya pemecahan masalah jembatan Konisberg yang sangat terkenal di Eropa. Masalah jembatan Konisberg adalah mungkin tidaknya melewati ketujuh jembatan di kota Konisberg masing-masing tepat satu kali dan kembali lagi di tempat semula. Untuk memecahkan masalah itu, Euler memisalkan daratan yang dihubungkan dengan simpul (*vertex*) dan jembatan dinyatakan dengan garis atau sisi (*edge*). Euler berkesimpulan bahwa tidak mungkin seseorang dapat melalui ketujuh jembatan itu, masing-masing satu kali dan kembali lagi ke tempat semula. Sehingga kisah Jembatan Konisberg ini menjadi sejarah lahirnya Teori Graf.

Teori Graf dalam matematika dan ilmu komputer adalah cabang kajian yang mempelajari sifat-sifat graf. Secara informal suatu graf adalah himpunan benda-benda yang disebut simpul (*vertex* atau *node*) yang terhubung oleh sisi (*edge*) atau busur (*arc*). Biasanya graf digambarkan sebagai kumpulan titik-titik (melambangkan simpul) yang dihubungkan oleh garis-garis (melambangkan sisi) atau garis berpanah (melambangkan busur). Suatu sisi dapat menghubungkan suatu simpul dengan simpul yang sama. Sisi demikian yang dinamakan dengan *loop*. Sebuah struktur graf bisa dikembangkan dengan memberi bobot pada tiap sisi. Graf berbobot dapat digunakan untuk melambangkan banyak konsep berbeda. Secara Formal, Suatu graf  $G$  dapat dinyatakan sebagai  $G = (V, E)$ . Graf  $G$  terdiri atas himpunan  $V$  yang berisikan simpul pada graf tersebut dan himpunan  $E$  yang berisi sisi pada graf tersebut. Himpunan  $E$  dinyatakan sebagai pasangan dari simpul yang ada dalam  $V$ .

Pelabelan merupakan pemetaan injektif yang memetakan unsur himpunan titik atau sisi ke bilangan asli yang disebut label. Pelabelan dengan domainnya

adalah gabungan dari himpunan simpul dan himpunan sisi, dinamakan pelabelan total, atau dengan kata lain simpul dan sisinya diberikan label. Pelabelan graf adalah suatu ilmu yang kajiannya berupa graf yang umumnya dipresentasikan oleh simpul dan sisi, serta label yang terdiri dari himpunan bilangan asli. Adalah *Sadlack* (1964), kemudian *Steward* (1966), *Kotzig* dan *Rosa* (1970) merupakan ilmuwan yang pertama kali memperkenalkan tentang pelabelan..

Ada banyak jenis pelabelan pada graf yang telah dikembangkan, salah satunya adalah pelabelan antimagic. Adalah *Hartsfield* dan *Ringel* (1994; 109) yang menyebutkan bahwa suatu graf  $G$  dengan  $p$  simpul dan  $q$  sisi disebut antimagic jika sisi sisinya dilabeli dengan bilangan bulat  $\{1, 2, \dots, q\}$  sedemikian sehingga bobot semua simpul berbeda.

Hingga kini, dikenal beberapa jenis pelabelan pada graf antara lain pelabelan graceful, pelabelan harmoni, pelabelan total tak beraturan, pelabelan magic, dan pelabelan antimagic. Pada penelitian ini, dibahas pelabelan total super antimagic pada  $d$ -muka bidang yaitu pelabelan total dimana hasil bobot tiap muka bidangnya akan membentuk barisan aritmatika. Pelabelan dengan domain  $V \cup E \cup F$ , disebut pelabelan total muka bidang dengan beda  $d$ . Secara informal, pelabelan total merupakan fungsi bijektif  $\varphi: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, |V| + |E|\}$ . Bobot muka bidang dari penelitian merupakan jumlahan dari semua label (jika ada) yang dimiliki oleh muka, sisi-sisi dan simpul-simpul yang mengelilinginya.

Dalam penelitian-penelitian sebelumnya, seperti dalam [4] memberikan pelabelan total super  $d$ -muka antimagic dari hasil korona dari graf pohon dengan  $r$  buah graf lintasan. Selain itu, dalam [1], [2] dan [3] disajikan beberapa hasil lain untuk pelabelan  $d$ -muka antimagic.

Pada penelitian ini, peneliti melakukan kajian pelabelan total super antimagic pada  $d$ -muka bidang untuk hasil korona dari graf friendship dengan graf lintasan.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka masalah dalam penelitian ini adalah apakah hasil korona graf friendship dan graf lintasan  $F_m \odot P_n$ , memiliki pelabelan total super antimagic pada  $d$ -muka bidang

### 1.3 Batasan Masalah

Pada pelabelan total super antimagic pada  $d$ -muka bidang dari  $F_m \odot P_n$ , dibatasi untuk nilai  $m \geq 3$ , untuk nilai  $n = 2$  dan  $n = 3$

### 1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan permumusan masalah di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah untuk menyelidiki  $F_m \odot P_n$  memiliki pelabelan total super antimagic pada  $d$ -muka bidang

### 1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diperoleh dari penelitian ini adalah memperluas pengetahuan tentang pelabelan total super antimagic khususnya pada hasil korona dua buah graf, dan bisa dipakai untuk meneliti jenis graf yang lain yang masih belum diteliti.

## BAB 2

### KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

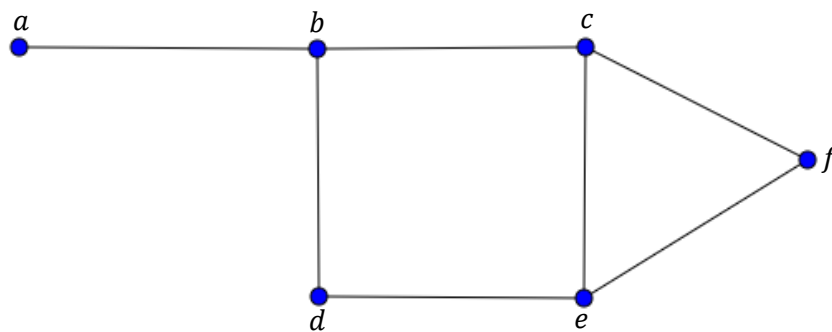
#### 2.1 TEORI GRAF

Pada bagian ini akan dijelaskan mengenai pengertian dan konsep dasar Teori Graf.

##### 2.1.1 Pengertian Graf

Graf adalah kumpulan simpul (*vertex* atau *node*) yang dihubungkan satu sama lain melalui sisi (*edge*). Secara informal, suatu graf adalah himpunan simpul (*vertex* atau *node*) yang terhubung oleh sisi (*edge*) atau busur (*arc*). Biasanya graf digambarkan sebagai kumpulan simpul yang dihubungkan oleh sisi atau busur, dimana busur yang dimaksud disini adalah sisi yang berarah.

Suatu graf  $G$  dapat dinyatakan sebagai  $G = (V, E)$ . Graf  $G$  terdiri atas himpunan  $V$  yang berisikan simpul pada graf tersebut dan himpunan  $E$  yang berisi sisi pada graf tersebut. Himpunan  $E$  dinyatakan sebagai pasangan dan simpul yang ada dalam  $V$ . Sebagai contoh definisi dari graf pada gambar di bawah ini adalah  $V = \{a, b, c, d, e, f\}$  dan  $E = \{ab, bc, bd, ce, cf, de, ef\}$



Gambar 2.1. Graf  $G$

### 2.1.2 Jenis-Jenis Graf

Graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa kategori (jenis) bergantung pada sudut pandang pengelompokannya. Pengelompokan graf dapat dipandang berdasarkan ada tidaknya sisi ganda atau loop, berdasarkan jumlah simpul, berdasarkan orientasi arah pada sisi atau berdasarkan keterhubungan simpul. (Rinaldi, 2005).

Berdasarkan ada tidaknya sisi ganda pada suatu graf maka graf digolongkan menjadi dua jenis:

- Graf Sederhana (*simple graph*). Graf yang tidak mengandung sisi ganda maupun loop dinamakan graf sederhana. Pada graf ini sisi merupakan pasangan tak terurut (*unordered pairs*) sehingga jika menuliskan sisi  $(u, v)$  sama saja dengan  $(v, u)$  dan  $G = (V, E)$  terdiri dari himpunan tidak kosong simpul-simpul dan  $E$  adalah himpunan pasangan tak terurut yang berbeda disebut sisi.
- Graf tak Sederhana (*unsimple graph*). Graf yang mengandung sisi ganda dinamakan graf tak sederhana. Ada dua macam graf tak sederhana, yaitu graf ganda (*multi graph*) dan graf semu (*pseudograph*). Graf ganda adalah graf yang mengandung sisi ganda. Sisi ganda yang menghubungkan sepasang simpul bisa lebih dari dua buah. Dapat juga didefinisikan graf ganda  $G = (V, E)$  terdiri dari himpunan tak kosong simpul-simpul  $V$  dan  $E$  adalah himpunan ganda (*multi set*) yang mengandung sisi ganda. Graf semu adalah graf yang mengandung *loop*.

Berdasarkan jumlah simpul pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi dua jenis:

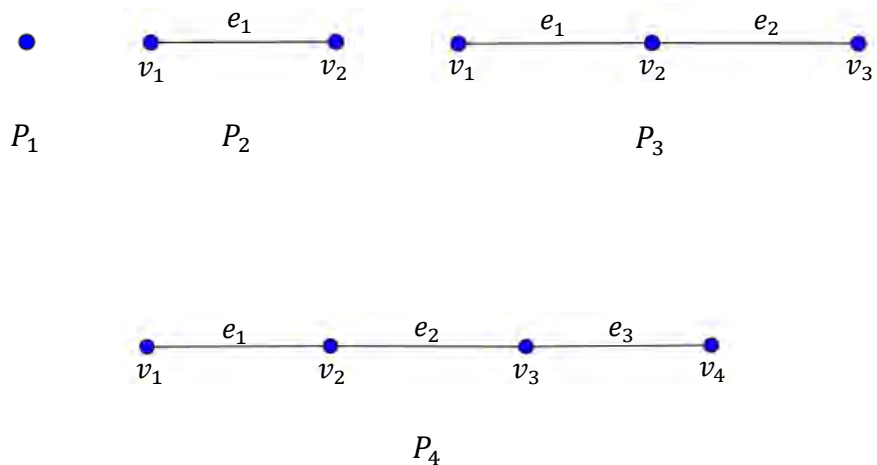
- Graf Berhingga (*limited graph*). Graf berhingga adalah graf yang jumlah simpulnya  $n$ , berhingga.
- Graf tak-Berhingga (*unlimited graph*). Graf tak-berhingga adalah graf yang jumlah simpulnya tidak berhingga banyaknya.

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan atas dua jenis:

- Graf tak-Berarah (*undirected graph*). Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak-berarah. Pada graf tak berarah, urutan pasangan simpul yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. Jadi  $(u, v) = (v, u)$  adalah sisi yang sama.
- Graf berarah (*directed graph* atau *digraph*). Graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah disebut sebagai graf berarah. Pada graf ini,  $(u, v)$  dan  $(v, u)$  menyatakan dua buah sisi yang berbeda. Dengan kata lain  $(u, v) \neq (v, u)$ . Untuk sisi  $(u, v)$ , simpul  $u$  dinamakan simpul asal (*initial vertex*) dan simpul  $v$  dinamakan simpul terminal (*terminal vertex*).

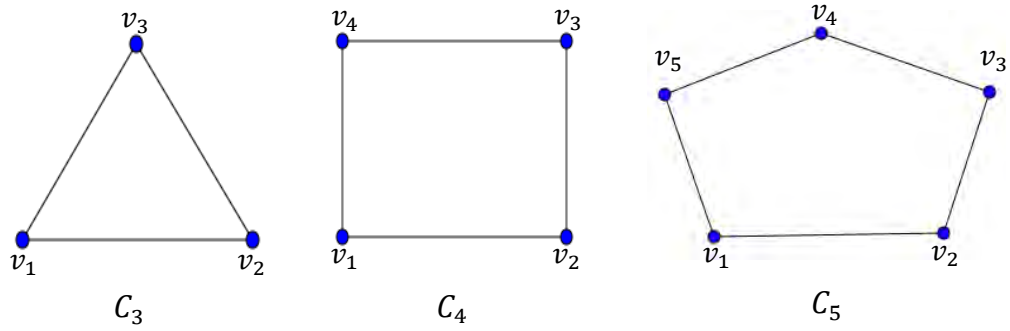
Berdasarkan jenisnya, terdapat beberapa jenis graf:

- Graf Lintasan (*path graph*). Graf lintasan dengan  $n$  simpul dinotasikan dengan  $P_n$  adalah graf yang terdiri dari lintasan tunggal dan memiliki  $n - 1$  sisi.



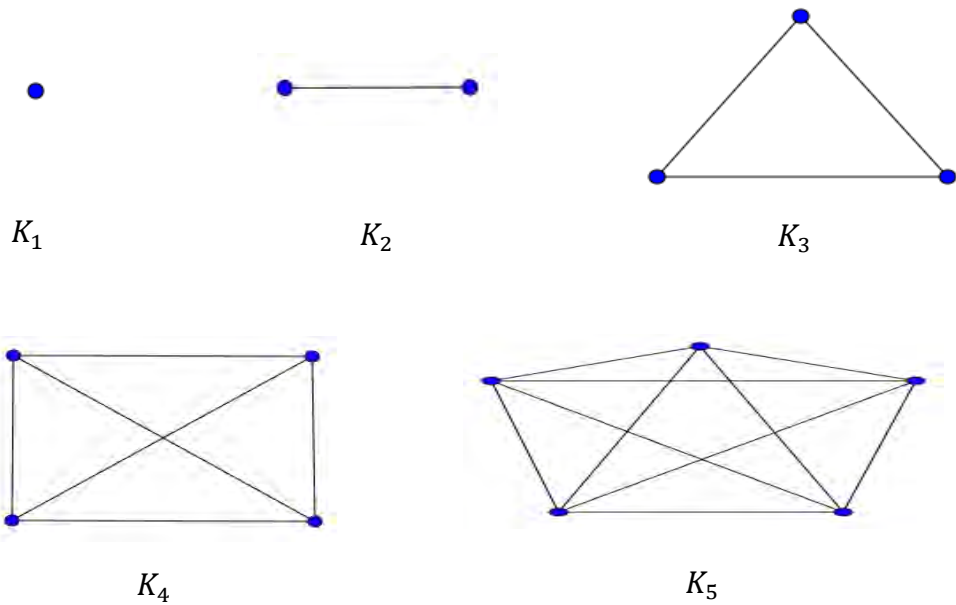
Gambar 2.2. Graf Lintasan

- Graf Sikel (*cycle graph*). Graf sikel adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf sikel dengan  $n$  simpul dilambangkan dengan  $C_n$ ,  $n \geq 3$  adalah graf dengan  $n$  simpul yaitu  $v_1, v_2, \dots, v_n$  dan sisi-sisi  $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)$



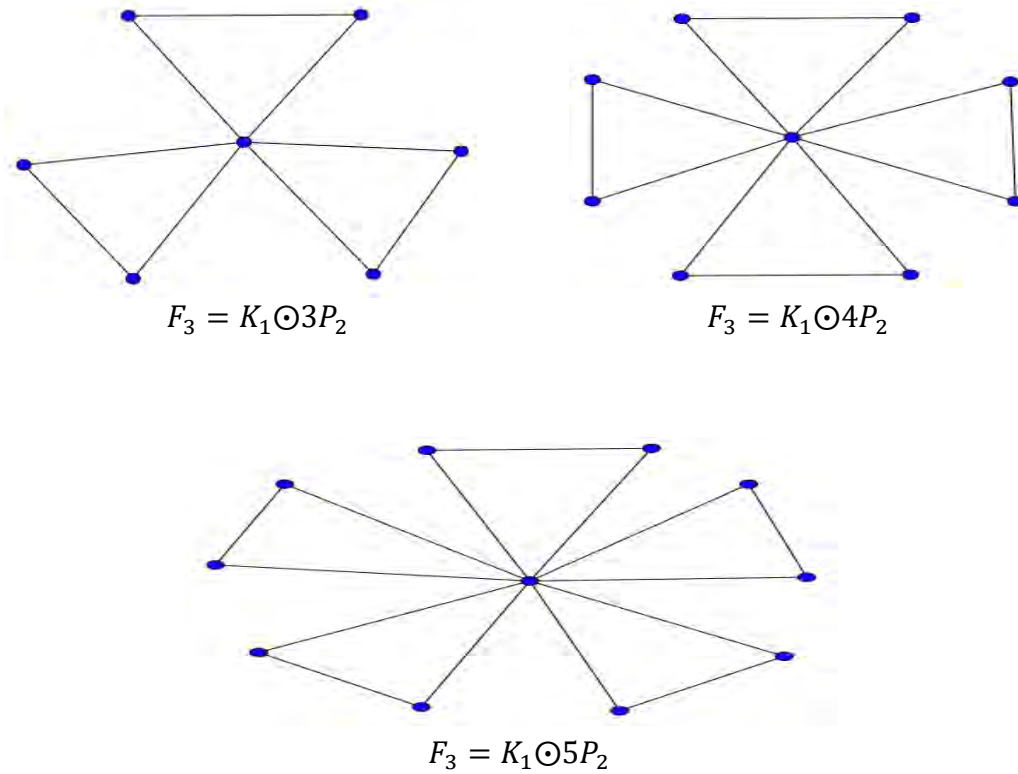
Gambar 2.3. Graf Sikel

- Graf Lengkap (*complete graph*). Graf lengkap dengan  $n$  simpul dinotasikan dengan  $K_n$ , adalah sebuah graf yang setiap simpul terhubung ke setiap simpul lainnya. Setiap simpul pada  $K_n$  berderajat  $n - 1$



Gambar 2.4. Graf Lengkap

- Graf Friendship. Graf friendship dengan  $m$  bilah dinotasikan dengan  $F_m$  yaitu graf yang terbentuk dari hasil korona  $K_1$  dengan  $mP_2$ , dimana  $m \geq 3$



Gambar 2.5. Graf Friendship

### 2.1.3 Operasi Pada Graf

Misalkan  $G_1$  dan  $G_2$  adalah dua buah graf sedemikian sehingga

$$V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset.$$

- *Gabungan*  $G = G_1 \cup G_2$  adalah graf dengan  $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$  dan  $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$ .
- *Join* dari graf  $G_1$  dan  $G_2$  dinotasikan dengan  $G = G_1 + G_2$ , adalah graf  $G$  dimana  $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$  dan  $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$ .
- *Hasil kali kartesian (cartesian product)* graf  $G_1$  dan  $G_2$  adalah graf  $G_1 \times G_2$  yang didefinisikan sebagai berikut

$$V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$$

dan

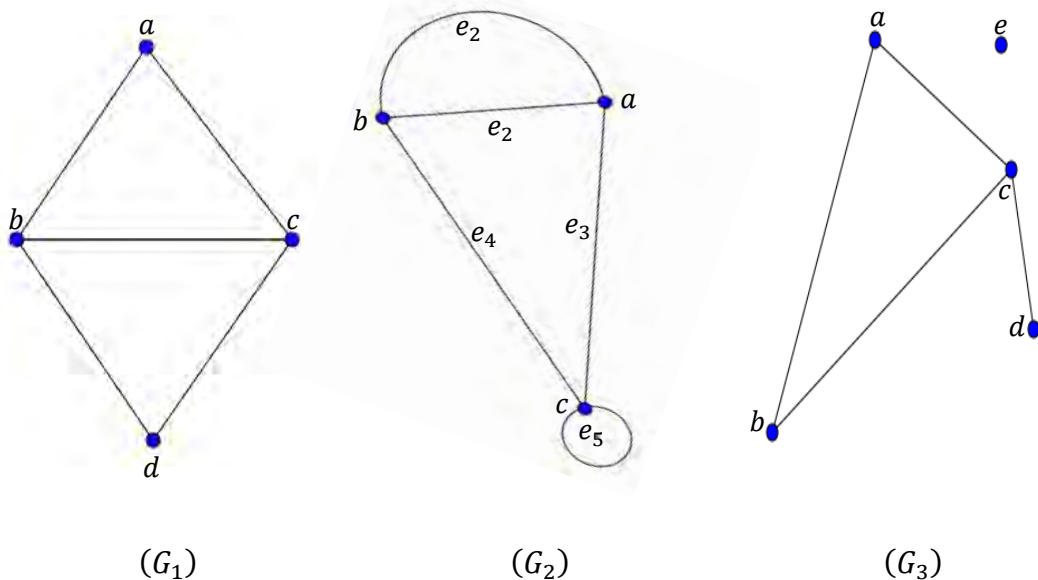
$$(x_1, x_2)(y_1, y_2) \in E(G) \leftrightarrow x_1 = y_1 \text{ dan } x_2 y_2 \in E(G_2) \text{ atau } x_2 = y_2 \text{ dan } x_1 y_1 \in E(G_1).$$



- *Corona product*  $G \odot H$  dari dua graf  $G$  dan  $H$  didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah duplikat dari graf  $G$  dan  $|V(G)|$  duplikat  $H_1, H_2, \dots, H_{|V(G)|}$  dari  $H$ , kemudian menghubungkan simpul ke- $i$  dari  $G$  ke setiap simpul di  $H_i, i = 1, 2, 3, \dots, |V(G)|$ .

## 2.2 Terminologi Dasar Graf

Kita akan sering menggunakan terminologi (istilah) yang berkaitan dengagraf. Dibawah ini didefinisikan beberapa terminologi yang sering dipakai. Contoh graf pada gambar berikut akan digunakan untuk memperjelas terminologi yang kita definisikan. Graf yang pertama pada  $G_1$  adalah graf sederhana,  $G_2$  adalah graf semu yang mengandung sisi maupun loop, sedangkan  $G_3$  adalah graf dengan sebuah simpul terpisah dari simpul yang lainnya.



Gambar 2.6 Graf yang digunakan untuk menjelaskan terminologi pada graf

- **Walk**

Suatu *walk* dalam  $G$  adalah suatu barisan berhingga dari simpul dan sisi secara bergantian yang dimulai dan diakhiri dengan simpul, sehingga setiap sisi yang bersisian dengan simpul sebelum dan sesudahnya, dimana sebuah sisi hanya dilalui satu kali. Didalam suatu *walk* pada sebuah graf dapat terjadi bahwa satu simpul dilalui lebih dari satu kali. Pada umumnya

penulisan barisan *walk* biasanya mengikutsertakan sisinya, tetapi boleh juga tidak.

Apabila simpul awal dan akhir dari suatu *walk* adalah sama, maka *walk* yang demikian disebut *closed walk* (walk tertutup). Sedangkan bila simpul awal dan simpul akhir dari suatu *walk* berbeda, maka *walk* yang demikian disebut *open walk* (walk terbuka).

- **Trail**

*Walk* yang semua sisi didalam setiap barisan harus berbeda disebut *Trail*. Trail tertutup adalah suatu trail dengan simpul awal dan simpul akhir yang sama.

- **Ketetangaan (*Adjacent*)**

Dua buah simpul dikatakan bertetangga bila keduanya terhubung langsung.

Tinjau graf  $G_1$  pada gambar 2 : Simpul  $a$  bertetangga dengan simpul  $b$  dan  $c$ , Simpul  $a$  tidak bertetangga dengan simpul  $d$ .

- **Bersisian (*Incidency*)**

Untuk sembarang sisi  $e = (v_j, v_k)$  dikatakan  $e$  bersisian dengan simpul  $v_j$ , atau  $e$  bersisian dengan simpul  $v_k$ .

Tinjau graf  $G_1$  pada gambar 2: Sisi  $(a, c)$  bersisian dengan simpul  $b$  dan simpul  $c$ , sisi  $(b, d)$  bersisian dengan simpul  $b$  dan simpul  $d$ , tetap sisi  $(a, b)$  tidak bersisian dengan simpul  $d$ .

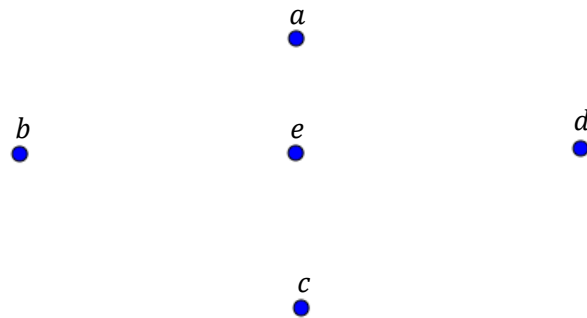
- **Simpul Terpencil (*Isolated Vertex*)**

Simpul terpencil adalah simpul yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya.

Tinjau graf  $G_2$  pada gambar 2: Simpul  $e$  adalah simpul terpencil.

- **Graf Nol (*empty graph*)**

Graf yang himpunan sisi  $E$  merupakan himpunan kosong disebut sebagai graf nol dan ditulis sebagai  $N_n$  yang didalam hal ini adalah jumlah simpul.



Gambar 2.7 Graf Nol  $N_5$

- **Derajat (Degree)**

Derajat suatu simpul adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut.

Notasi:  $d(v)$

Tinjau graf  $G_1$  pada gambar 2:  $d(a) = d(d) = 2$

$$d(b) = d(c) = 3$$

Tinjau graf  $G_3$  pada gambar 2:  $d(e) = 0 \rightarrow$  simpul terpencil

$$d(d) = 1 \rightarrow \text{simpul anting-anting (pendant vertex)}$$

Tinjau graf  $G_2$  pada gambar 2:  $d(a) = 3 \rightarrow$  bersisian dengan sisi ganda

$$d(b) = 4 \rightarrow \text{bersisian dengan sisi gelap (loop)}$$

**Lemma Jabat Tangan.** Jumlah derajat semua simpul pada suatu graf adalah genap, yaitu dua kali jumlah sisi pada graf tersebut.

Dengan kata lain, jika  $G = (V, E)$  maka  $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$

Tinjau graf  $G_1$  pada gambar 2:  $d(a) + d(b) + d(c) + d(d) = 2 + 3 + 3 + 2 = 10 = 2 \times \text{jumlah sisi} = 2 \times 5$

Tinjau graf  $G_2$  pada gambar 2:  $d(a) + d(b) + d(c) = 3 + 3 + 4 = 10$   
 $= 2 \times \text{jumlah sisi} = 2 \times 5$

Tinjau graf  $G_3$  pada gambar 2:  $d(a) + d(b) + d(c) + d(d) + d(e)$   
 $= 2 + 2 + 3 + 1 + 0 = 8$   
 $= 2 \times \text{jumlah sisi} = 2 \times 4$

- **Subgraph**

Misalkan  $G = (V, E)$  adalah sebuah graf.  $G_1 = (V_1, E_1)$  adalah upagraf (*subgraph*) dari  $G$  jika  $V_1$  termasuk  $V$  dan  $E_1$  termasuk  $E$ .

- **Graf Berbobot (*Weight Graph*)**

Graf yang setiap garisnya berhubungan dengan suatu bilangan bulat tak negatif yang menyatakan bobot garis tersebut. Bobot garis  $e$  biasanya diberi simbol  $w(e)$ . Jumlah bobot semua garis disebut total bobot.

Ada dua terminologi (istilah) pada graf, yang selalu digunakan yaitu lintasan (*path*) dan sirkuit (*cycle*). Lintasan (*path*) adalah suatu *walk* yang keseluruhan simpulnya berbeda, kecuali simpul awal dan simpul akhir yang boleh sama. Sirkuit (*cycle*) dari suatu graf adalah *closed path*, atau dengan kata lain sirkuit (*cycle*) adalah lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama.

## 2.3 Pemetaan

Pada bagian ini akan dijelaskan mengenai pengertian dan konsep dasar pemetaan.

### 2.3.1 Definisi Pemetaan

Misalkan  $A$  dan  $B$  adalah dua himpunan yang tidak kosong. Suatu cara atau aturan yang memasangkan setiap elemen dari himpunan  $A$  dengan tepat satu elemen di himpunan  $B$  disebut pemetaan dari himpunan  $A$  ke himpunan  $B$ . Pemetaan dari himpunan  $A$  ke himpunan  $B$  diberi notasi  $\delta$ , yaitu  $\delta: A \rightarrow B$ .

Selanjutnya himpunan  $A$  disebut sebagai daerah asal (*domain*) dan himpunan  $B$  disebut daerah kawan (*kodomain*). Secara umum pemetaan dapat digolongkan menjadi 3 golongan sebagai berikut

- **Pemetaan satu-satu (injektif)** adalah pemetaan dimana setiap elemen di daerah kodomain yang berpasangan mempunyai pasangan elemen tepat satu di daerah domain, dapat dituliskan secara matematika berikut :

Pemetaan  $\delta: A \rightarrow B$ , injektif  $\leftrightarrow \forall x, y \in A, \delta(x) = \delta(y) \rightarrow x = y$

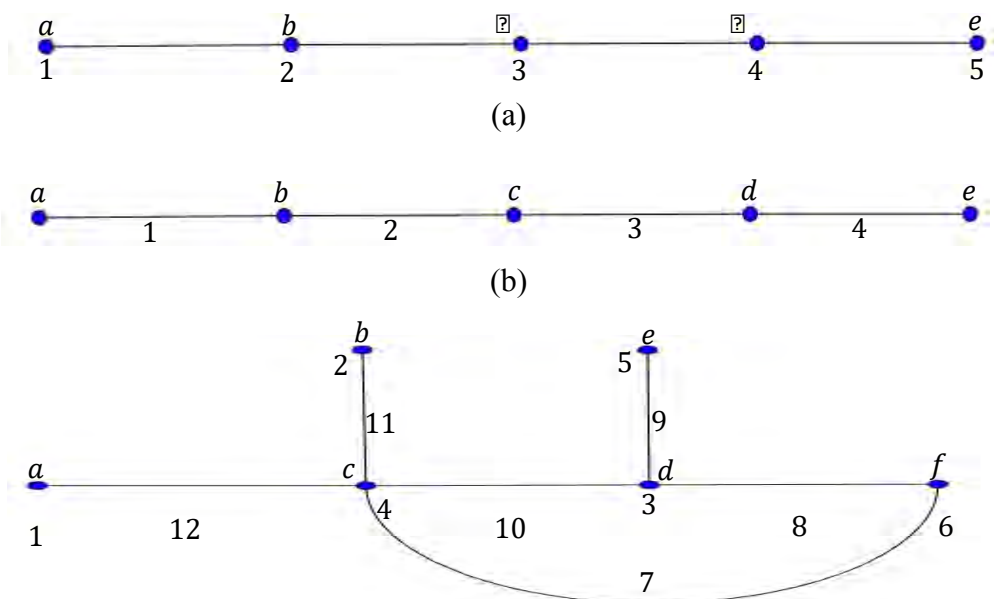
- **Pemetaan pada (surjektif)** adalah pemetaan dimana semua elemen didaerah kodomain mempunyai pasangan elemen didaerah domain, dapat dituliskan secara matematika berikut :

Pemetaan  $\delta: A \rightarrow B$ , surjektif  $\leftrightarrow \forall x, y \in A, \exists y \in B, \exists \delta(x) = y$

- **Pemetaan korespondensi satu-satu (bijektif)** adalah pemetaan yang memenuhi pemetaan injektif dan pemetaan surjektif. Istilah ini berasal dari kenyataan bahwa setiap elemen domain akan berkorespondensi satu-satu secara unik ke kodomain dan sebaliknya.

## 2.4 Pelabelan Graf

Pelabelan pada suatu graf adalah sebarang pemetaan atau fungsi yang memasangkan unsur-unsur graf (titik dan sisi) dengan bilangan (biasanya bilangan bulat positif). Atau dengan kata lain suatu pelabelan dari graf  $G(V, E)$  merupakan suatu pemetaan bijektif dari  $V \cup E$  ke himpunan bilangan asli berurutan yang dimulai dari 1. Jika domain dari pemetaan adalah simpul, maka pelabelan disebut pelabelan simpul (*vertex labeling*). Jika domainnya adalah sisi, maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*) dan jika domainnya simpul dan sisi, maka disebut pelabelan total (*total labeling*). Ada juga yang dinamakan *pelabelan super total*, yaitu pelabelan total yang dimulai dengan melabeli simpul terlebih dahulu, kemudian sisinya.

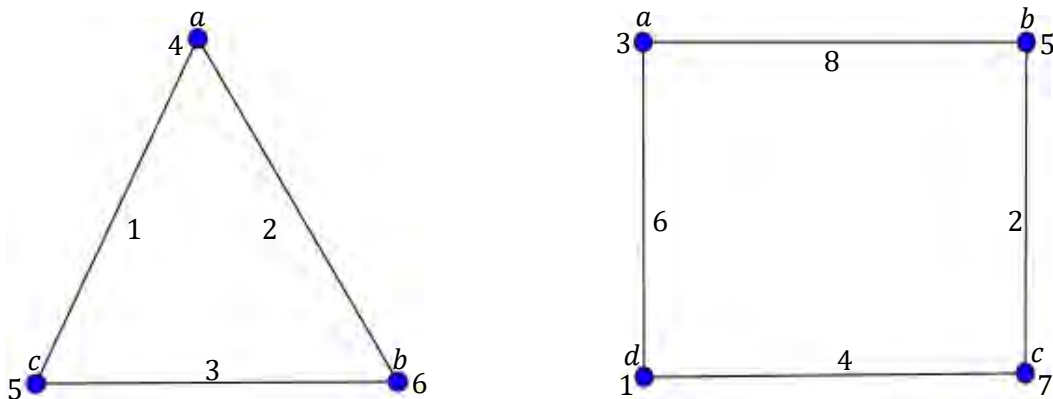


(c)

Gambar 2.8. (a) Pelabelan simpul, (b) Pelabelan Sisi, (c) Pelabelan Super Total

Pada gambar 2.8, (a) adalah pelabelan simpul, (b) adalah pelabelan sisi dan (c) adalah pelabelan super total yang juga merupakan pelabelan super total sisi magic dengan total bobot tiap sisi sama yaitu 17.

Pelabelan total muka bidang adalah pelabelan yang total pada suatu muka bidang dimana bobot muka bidang adalah hasil penjumlahan pada label sisi dan label titik yang ada pada muka bidang tersebut. Pada gambar segitiga di bawah ini, dapat dilihat untuk bobot muka bidang adalah penjumlahan label pada sisi dan label pada simpul untuk satu bidang segitiga.  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ , sehingga bobot muka bidang pada segitiga adalah 21. Sedangkan pada persegi,  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$  sehingga bobot muka bidang pada persegi adalah 36.



Gambar 2.9. Contoh pelabelan total muka bidang pada graf



## BAB 3

### METODE PENELITIAN

Pada bab ini diuraikan langkah-langkah penelitian yang digunakan atau dikerjakan untuk mencapai tujuan penelitian.

#### 3.1 Tahapan Penelitian

Tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Studi literatur

Pada tahap ini dikumpulkan informasi mengenai beberapa pelabelan total super antimagic pada beberapa jenis graf yang telah diteliti oleh peneliti-peneliti yang sebelumnya. Informasi-informasi tersebut akan didapatkan dari buku-buku, jurnal ilmiah, *paper*, dan artikel-artikel yang terkait dengan pelabelan total super antimagic pada graf.

2. Mempelajari tentang pelabelan antimagic dan cara untuk menentukan pola dari hasil graf yang dilabeli

Pada tahap ini akan dilakukan pelabelan total super antimagic pada  $d$ -muka bidang dari hasil hasil korona graf friendship dengan graf lintasan.

3. Mencoba melabeli graf hasil korona antara friendship dengan lintasan, dimulai dengan menentukan nilai  $n$  dan  $m$  nya yang dimulai dengan  $n = 2$  dan  $n = 3$ , dan  $m \geq 3$

4. Menyajikan contoh hasil pelabelan yang didapat dengan gambar

Untuk mempermudah pemahaman tentang pelabelan total super antimagic pada  $d$ -muka bidang dari hasil hasil korona graf friendship dengan graf lintasan, akan ditampilkan pada gambar, hasil dari pelabelan  $F_m \odot P_n$  dengan nilai  $m$  dan  $n$  nya yang ditentukan.



5. Pembuktian

Pada tahap ini akan ditunjukkan bahwa untuk hasil korona graf friendship dan graf lintasan mempunyai pelabelan total super antimagic dan akan disertai dengan pola pelabelan yang didapat dari hasil pelabelan pada  $F_m \odot P_n$ , dengan  $n = 2, n = 3$  dan  $m \geq 3$

6. Menyusun laporan

Setelah diperoleh hasil dari pelabelan total super antimagic pada  $d$ -muka bidang dari hasil hasil korona graf friendship dengan graf lintasan dan pola penentuan bobot muka, maka dibuat laporan dari hasil penelitian tersebut.

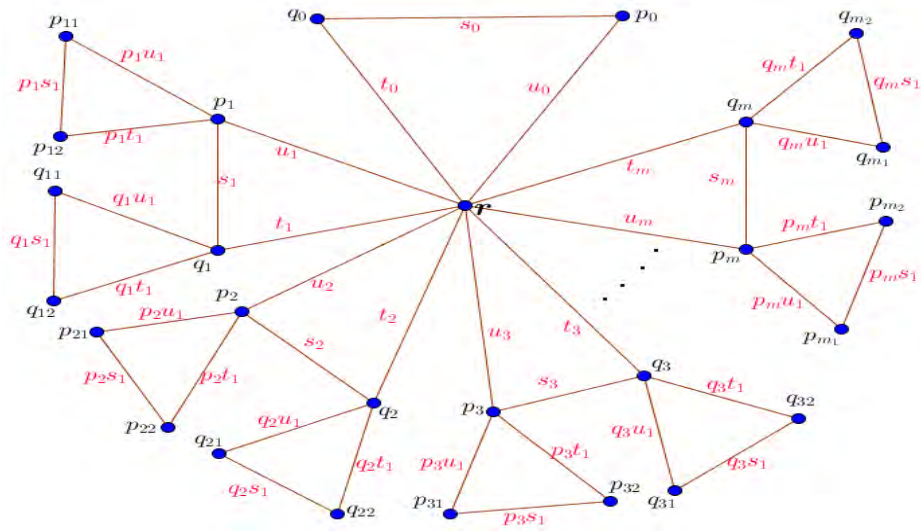
## BAB 4

### HASIL DAN PEMBAHASAN

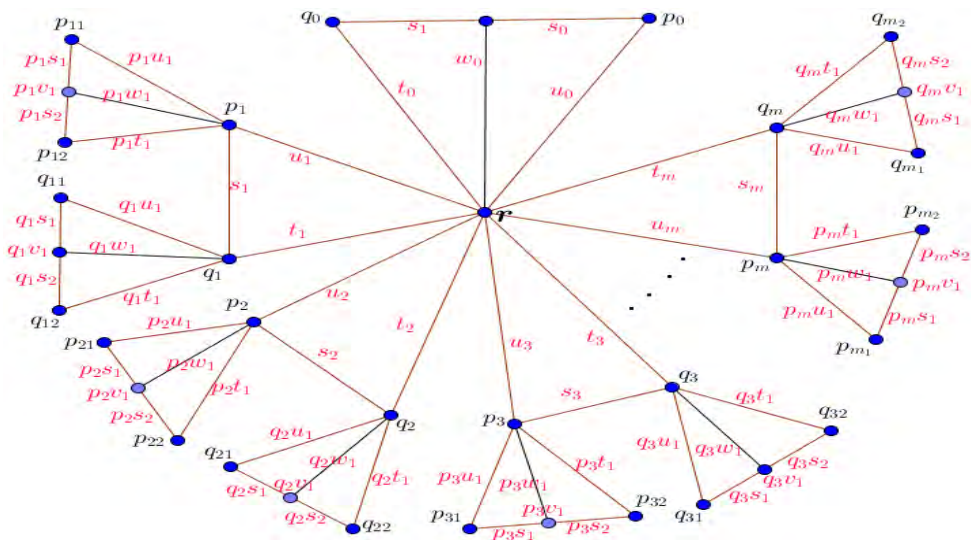
#### 5.1 Bentuk umum graf $F_m \odot P_n$

Graf  $F_m \odot P_n$  adalah graf hasil korona graf friendship  $F_m$  yang mempunyai  $m$  bilah dengan graf lintasan  $P_n$  yang berorder  $n$ , dimana  $m \geq 3$ ,  $n = 2$  dan  $n = 3$ .

Berikut ini akan disajikan bentuk umum graf  $F_m \odot P_n$  pada gambar berikut.



Gambar 4.1 Bentuk Umum Graf  $F_m \odot P_2$

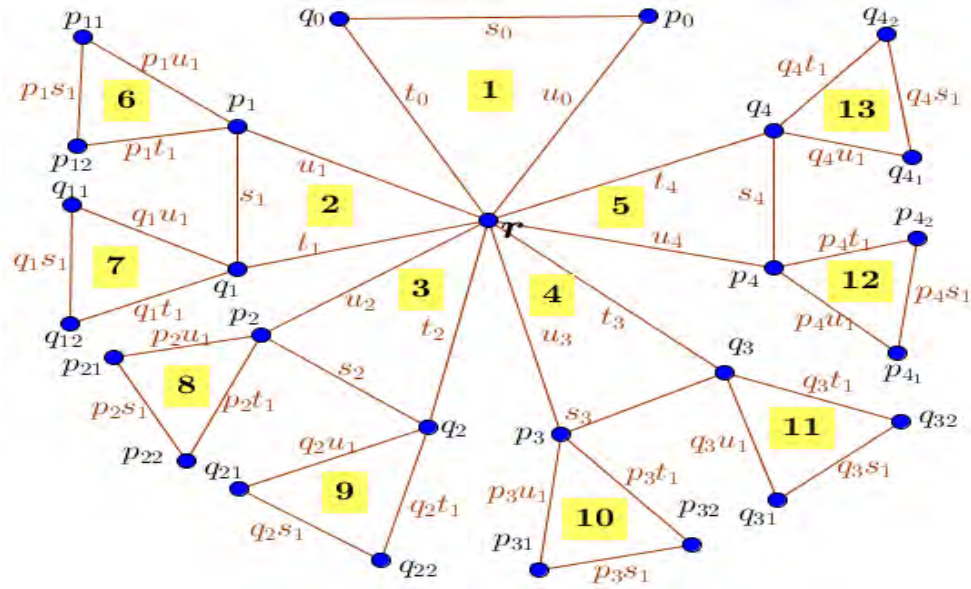


Gambar 4.2 Bentuk Umum Graf  $F_m \odot P_3$

Untuk bentuk umum graf  $F_m \odot P_2$  pada gambar 4.1, tiap muka bidang memiliki tiga simpul dan tiga sisi. Untuk simpul pusat atau simpul tengah, dinotasikan dengan  $r$ . Simpul pada sebelah kanan dinotasikan dengan  $p$ , sedangkan simpul sebelah kiri dinotasikan dengan  $q$ . Untuk sisi bagian atas dinotasikan dengan  $s$ , sisi bagian kiri dinotasikan dengan  $t$  sedangkan sisi bagian kanan dinotasikan dengan  $u$ . Sedangkan untuk bentuk umum graf  $F_m \odot P_3$

## 5.2 Penentuan nilai $d$ yang mungkin pada graf $F_m \odot P_n$

Pada bagian ini, akan disajikan terlebih dahulu pola untuk menentukan jumlah titik, sisi dan muka bidang pada graf  $F_m \odot P_n$ , untuk  $m \geq 3$ ,  $n = 2$  dan  $n = 3$



Gambar 4.3 Graf  $G = F_4 \odot P_2$

Pada gambar 4.3, banyak muka bidang pada graf  $G$  adalah 13, banyaknya simpul adalah 27 dan banyak sisi adalah 39.

Untuk muka bidang pertama, jumlah simpul atas =  $n$  dimana  $n$  adalah order dari graf lintasan yang nilainya = 2. Untuk muka bidang ke-2 sampai ke-5 jumlah simpul = 9, yang diperoleh dari  $2m + 1$ , dimana  $2m$  adalah banyaknya bilah pada graf friendship dikali dengan 2 simpul yang ada pada setiap bilah kemudian dijumlahkan dengan 1 pada simpul pusat, dengan diketahui  $m = 4$ . Untuk muka bidang ke-6 dan ke-13 jumlah simpul = 24 yang diperoleh dari  $(2n) \times m$ , dimana  $2n$  adalah jumlah simpul pada graf lintasan dikali dengan

dengan 2, simpul atas untuk setiap bilah pada muka bidang. Sehingga dapat ditulis pola untuk menentukan banyaknya simpul atau order dari  $G = |G|$ ,

$$|G| = 2mn + 2m + n + 1$$

Untuk muka bidang ke-6 dan ke-7 jumlah sisi = 6, yang diperoleh dari  $2(2n - 1)$  dimana  $2n - 1$  adalah jumlah sisi pada muka bidang dikali 2 yang merupakan simpul  $p$  dan  $q$  pada graf friendship. Sehingga jumlah sisi untuk muka bidang ke-2 ke-6 dan ke-7 = 9, didapat dari  $2(2n - 1) + 3$  dimana 3 adalah jumlah sisi muka bidang ke-2 pada graf friendship. Maka, untuk banyaknya sisi pada muka bidang ke-2 sampai ke  $m$  dapat ditulis  $m = m[2(2n - 1) + 3]$ . Sehingga jumlah seluruh sisi = 39 diperoleh dari  $(m[2(2n - 1) + 3]) + 2n - 1$ , dimana  $2n - 1$  adalah banyaknya sisi pada muka bidang pertama. Maka dapat ditulis pola untuk menentukan banyaknya simpul atau size dari  $G = \|G\|$ ,

$$\begin{aligned}\|G\| &= (m[2(2n - 1) + 3]) + 2n - 1 \\ &= (m[4n - 2 + 3]) + 2n - 1 \\ &= m(4n + 1) + 2n - 1 \\ \|G\| &= 4mn + m + 2n - 1\end{aligned}$$

Sedangkan untuk banyaknya muka bidang pada graf  $G$  yang dinotasikan dengan  $f$ , diperoleh dari

$$f = 2mn + n - m - 1$$

Lemma : Misalkan  $m \geq 3$ ,  $n = 2$  dan  $n = 3$ . Jika graf  $G = F_m \odot P_n$  memiliki suatu pelabelan total super  $d$ -muka antimagic, maka nilai  $d \leq 15$  bukti.

Diberikan  $|G| = 2mn + 2m + n + 1$

$$\|G\| = 4mn + m + 2n - 1$$

$$f = F(G) = 2mn + n - m - 1$$

karena  $F_m \odot P_n$  memiliki pelabelan total super antimagic pada  $d$ -muka bidang, dan setiap muka bidang berbentuk segitiga dengan tiga titik dan tiga sisi maka bobot muka bidang maksimum yang mungkin diperoleh dari

$$\begin{aligned}\alpha &= |G| + (|G| - 1) + (|G| - 2) + (|G| + \|G\|) + (|G| + (\|G\| - 1)) + \\ &\quad (|G| + (|G| - 2)) \\ &= 6|G| + 3\|G\| - 6\end{aligned}$$

dan bobot muka bidang minimum yang mungkin diperoleh dari

$$\begin{aligned}\beta &= 1 + 2 + 3 + (|G| + 1) + (|G| + 2) + (|G| + 3) \\ &= 3|G| + 12\end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}a + (f - 1)d &\leq \beta \\ (f - 1)d &\leq \beta - a \\ (f - 1)d &\leq (6|G| + 3\|G\| - 6) - (3|G| + 12) \\ (f - 1)d &\leq 3|G| + 3\|G\| - 18 \\ d &\leq \frac{3|G| + 3\|G\| - 18}{f - 1}\end{aligned}$$

subtitusikan nilai  $|G|$ ,  $\|G\|$  dan  $f$

$$\begin{aligned}d &\leq \frac{3(2mn + 2m + n + 1) + 3(4mn + m + 2n - 1) - 18}{(2mn + n - m - 1) - 1} \\ d &\leq \frac{6mn + 6m + 3n + 3 + 12mn + 3m + 6n - 3 - 18}{(2mn + n - m - 1) - 1} \\ d &\leq \frac{18mn + 9m + 9n - 18}{(2mn + n - m - 1) - 1} \\ d &\leq \frac{9(2mn + m + n - 2)}{2mn - m + n - 2} \\ d &\leq 9 \times \frac{(2mn + m + n - 2)}{2mn - m + n - 2}\end{aligned}$$

perhatikan bahwa  $\frac{(2mn+m+n-2)}{2mn-m+n-2} = \frac{15}{9}$ , untuk  $n = 2$  dan  $m = 3$

sehingga  $d \leq 9 \times \frac{15}{9}$ ;  $d \leq 15$ .

untuk nilai  $n = 2$  dan  $m = 4$ ,

$$\frac{(2mn+m+n-2)}{2mn-m+n-2} = \frac{20}{12}, \text{ sehingga } d \leq 9 \times \frac{20}{14}; d \leq 15$$

untuk nilai  $n = 2$  dan  $m = 5$ ,

$$\frac{(2mn+m+n-2)}{2mn-m+n-2} = \frac{25}{15}, \text{ sehingga } d \leq 9 \times \frac{25}{15}; d \leq 15$$

untuk nilai  $n = 2$  dan  $m = 6$ ,

$$\frac{(2mn+m+n-2)}{2mn-m+n-2} = \frac{30}{18}, \text{ sehingga } d \leq 9 \times \frac{30}{18}; d \leq 15$$

untuk nilai  $n = 2$  dan  $m = 7$ ,

$$\frac{(2mn+m+n-2)}{2mn-m+n-2} = \frac{35}{21}, \text{ sehingga } d \leq 9 \times \frac{35}{21}; d \leq 15$$

untuk nilai  $n = 2$  dan  $m = 8$ ,

$$\frac{(2mn+m+n-2)}{2mn-m+n-2} = \frac{40}{24}, \text{ sehingga } d \leq 9 \times \frac{40}{24}; d \leq 15$$

untuk nilai  $n = 2$  dan  $m = 9$ ,

$$\frac{(2mn+m+n-2)}{2mn-m+n-2} = \frac{45}{27}, \text{ sehingga } d \leq 9 \times \frac{45}{27}; d \leq 15$$

untuk nilai  $n = 2$  dan  $m = 10$ ,

$$\frac{(2mn+m+n-2)}{2mn-m+n-2} = \frac{50}{30}, \text{ sehingga } d \leq 9 \times \frac{50}{30}; d \leq 15$$

terlihat membentuk pola untuk setiap nilai pembilang dimana  $3 \leq m \leq 10$  selalu bertambah lima, dan untuk setiap nilai penyebut dimana  $3 \leq m \leq 10$  selalu bertambah tiga. Dan selisih antara pembilang dan penyebut untuk nilai  $m = 3$  adalah enam, dan akan selalu bertambah dua untuk setiap nilai  $> 3$ , sehingga

$$9 \times \frac{(2mn+m+n-2)}{2mn-m+n-2} = 15 \text{ untuk setiap nilai } n = 2 \text{ dan } m > 10, \text{ maka } d \leq$$

$$9 \frac{(2mn+m+n-2)}{2mn-m+n-2}, \text{ sehingga } d \leq 15$$

untuk nilai  $n = 3$  dan  $m = 3$ .

$$\frac{(2mn+m+n-2)}{2mn-m+n-2} = \frac{22}{16}, \text{ sehingga } d \leq 9 \times \frac{22}{16}; d \leq 13$$

untuk nilai  $n = 3$  dan  $m = 4$

$$\frac{(2mn+m+n-2)}{2mn-m+n-2} = \frac{29}{21}, \text{ sehingga } d \leq 9 \times \frac{29}{21}; d \leq 13$$

untuk nilai  $n = 3$  dan  $m = 5$

$$\frac{(2mn+m+n-2)}{2mn-m+n-2} = \frac{36}{26}, \text{ sehingga } d \leq 9 \times \frac{36}{26}; d \leq 13$$

untuk nilai  $n = 3$  dan  $m = 6$

$$\frac{(2mn+m+n-2)}{2mn-m+n-2} = \frac{43}{31}, \text{ sehingga } d \leq 9 \times \frac{43}{31}; d \leq 13$$

untuk nilai  $n = 3$  dan  $m = 7$

$$\frac{(2mn+m+n-2)}{2mn-m+n-2} = \frac{50}{36}, \text{ sehingga } d \leq 9 \times \frac{50}{36}; d \leq 13$$

untuk nilai  $n = 3$  dan  $m = 8$ ,

$$\frac{(2mn+m+n-2)}{2mn-m+n-2} = \frac{57}{41}, \text{ sehingga } d \leq 9 \times \frac{57}{41}; d \leq 13$$

untuk nilai  $n = 3$  dan  $m = 9$ ,

$$\frac{(2mn+m+n-2)}{2mn-m+n-2} = \frac{64}{46}, \text{ sehingga } d \leq 9 \times \frac{64}{46}; d \leq 13$$

untuk nilai  $n = 3$  dan  $m = 10$ ,

$$\frac{(2mn+m+n-2)}{2mn-m+n-2} = \frac{71}{51}, \text{ sehingga } d \leq 9 \times \frac{71}{51}; d \leq 13$$

terlihat membentuk pola untuk setiap nilai pembilang dimana  $3 \leq m \leq 10$  selalu bertambah tujuh, dan untuk setiap nilai penyebut dimana  $3 \leq m \leq 10$  selalu

bertambah lima. Dan selisih antara pembilang dan penyebut untuk nilai  $m = 3$  adalah enam, dan akan selalu bertambah dua untuk setiap nilai  $> 3$ , sehingga

$9 \times \frac{(2mn+m+n-2)}{2mn-m+n-2}$ , konvergen ke 13, untuk setiap nilai  $n = 3$  dan  $m > 10$ , maka

$d \leq 9 \frac{(2mn+m+n-2)}{2mn-m+n-2}$ , sehingga  $\leq 13$

Sehingga nilai  $d$  maksimum untuk graf  $G = F_m \odot P_n$  dimana  $\geq 3$ ,  $n = 2$ ,  $n = 3$  adalah nilai  $d$  terbesar yaitu  $d \leq 15$

### 5.3 Pelabelan Total Super Antimagic pada $d$ -muka bidang untuk

$F_m \odot P_n$ , dengan  $n = 2$  dan  $n = 3$

#### Teorema 4.1

Diberikan  $F_m$  adalah graf friendship dengan  $m$  bilah dan  $P_2$  adalah lintasan order 2. Jika  $G = F_m \odot P_2$ , maka  $G$  memiliki pelabelan total super antimagic pada  $d$ -muka bidang, untuk setiap nilai  $m, n \in$  bilangan asli dengan  $m \geq 3$  dan  $d = 1$ .

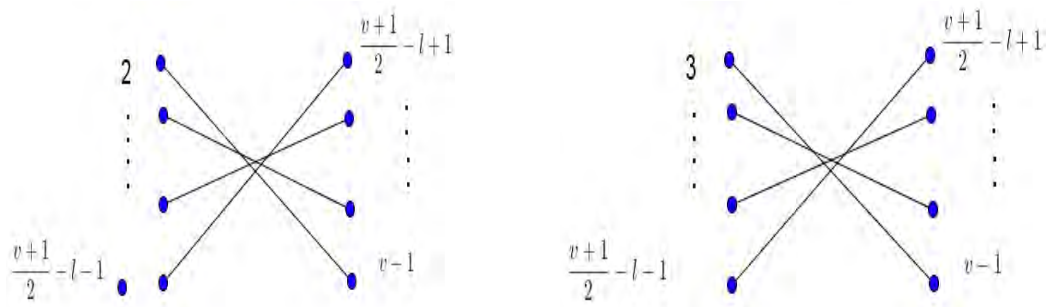
bukti.

Langkah Pertama, akan diberikan pola pemberian label pada  $G = F_m \odot P_2$  yang dimulai dengan pelabelan simpul (tinjau gambar 4.1)

1. Untuk menentukan label pada simpul, pertama-tama akan ditentukan label pada simpul pusat  $r$ , yaitu dengan mencari angka tengah dari nilai  $v$ , yang didapatkan dari  $\frac{v+1}{2}$
2. Melabeli simpul pada graf friendship. Untuk  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_m$  diberi label  $\frac{v+1}{2} - 1, \frac{v+1}{2} - 2, \frac{v+1}{2} - 3, \dots, \frac{v+1}{2} - l$ . Untuk  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_m$  diberi label  $\frac{v+1}{2} + 1, \frac{v+1}{2} + 2, \frac{v+1}{2} + 3, \dots, \frac{v+1}{2} + l$ .
3. Label pada simpul  $p_0$  dan  $q_0$  selalu 1 dan nilai terbesar pada  $|G|$ .
4. Melabeli titik pada graf lintasan. Untuk  $p_{11}$  dan  $q_{11}$ ,  $p_{12}$  dan  $q_{12}$ ,  $p_{21}$  dan  $q_{21}$ ,  $p_{31}$  dan  $q_{31}$ ,  $\dots$ ,  $p_{m1}$  dan  $q_{m1}$  dengan menentukan barisan bilangan asli dimulai dari 2 sampai  $\frac{v+1}{2} - l - 1$  dan barisan bilangan asli dari  $\frac{v+1}{2} + l + 1$  sampai  $v - 1$ , sehingga

dikelompokkan menjadi dua yaitu barisan bilangan asli dari 2 sampai  $\frac{v+1}{2} - l - 1$  sebagai kelompok pertama dan barisan bilangan asli dari  $\frac{v+1}{2} + l + 1$  sampai  $v - 1$  sebagai kelompok kedua.

5. Pasangkan setiap bilangan secara terurut pada kelompok kedua tepat satu pasangan dengan setiap bilangan genap secara terurut pada kelompok pertama. Setelah itu pasangkan setiap bilangan sisa pada kelompok kedua tepat satu pasangan dengan setiap bilangan ganjil pada kelompok pertama. Akan dikonstruksikan pada gambar dibawah ini.



Gambar 4.3. Pasangan Bilangan Pada Kelompok Pertama dan Kedua

6. Setiap bilangan yang dipasangkan kemudian dijumlahkan. Untuk pasangan kelompok pertama genap dengan kelompok kedua, hasil jumlah terkecil sampai terbesar dipasangkan pada titik  $q_{m2}, q_{m1}, \dots, q_{12}, q_{11}$  Secara berurutan. Untuk pasangan kelompok pertama ganjil dengan kelompok kedua, hasil jumlah terbesar sampai terkecil dipasangkan pada  $p_{m2}, p_{m1}, \dots, p_{12}, p_{11}$  secara berurutan.
7. Hasil yang didapatkan adalah pola bentuk pelabelan simpul magic.

Akan diberikan contoh untuk pelabelan simpul.

Tinjau gambar 4.3

Diketahui:  $G = F_4 \odot P_2$ , dengan  $m = 4, n = 2$

$$\begin{aligned}
 |G| &= 2mn + 2m + n + 1 \\
 &= (2 \times 4 \times 2) + (2 \times 4) + 2 + 1 \\
 &= 16 + 8 + 2 + 1 \\
 &= 27 .
 \end{aligned}$$

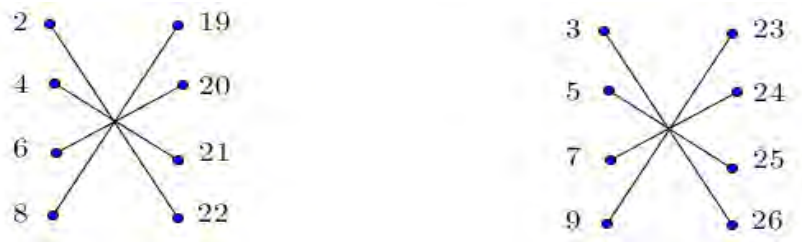
$$\text{Simpul tengah} = \frac{|G|+1}{2} = \frac{27+1}{2} = \frac{28}{2} = 14.$$



karena  $m = 4$ , maka label untuk titik  $p_1, p_2, p_3, p_4$  secara berurutan adalah  $14 - 1, 14 - 2, 14 - 3, 14 - 4 = 13, 12, 11, 10$  dan label untuk  $q_1, q_2, q_3, q_4$  secara berurutan adalah  $14 + 1, 14 + 2, 14 + 3, 14 + 4 = 15, 16, 17, 18$ .

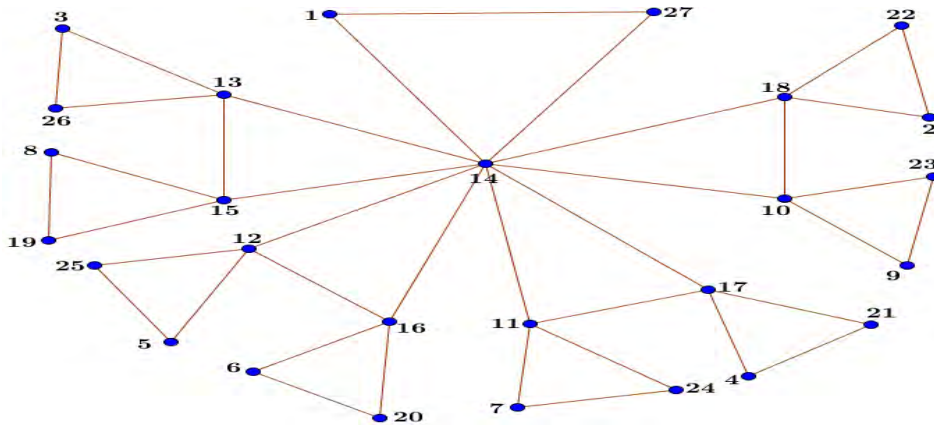
Kelompok pertama = 2,3,4,5,6,7,8,9 dan kelompok kedua = 19,20,21,22,23,24,25,26.

kelompok pertama genap = 2,4,6,8 akan dipasangkan dengan empat bilangan pertama pada kelompok kedua yaitu 19,20,21,22 dan kelompok pertama ganjil = 3,5,7,9 akan dipasangkan dengan empat bilangan sisa pada kelompok kedua yaitu 23,24,25,26,



Gambar 4.3. Pasangan Bilangan Pada Kelompok Pertama dan Kedua,  $G = F_4 \odot P_2$

Untuk kelompok pertama genap dengan pasangan kelompok kedua, setiap pasangan dijumlahkan dan hasilnya diurutkan dari hasil jumlah pasangan bilangan terkecil sampai terbesar, setelah itu dilabeli pada  $q_{42}, q_{41}, q_{32}, q_{31}, q_{22}, q_{21}, q_{12}, q_{11}$  secara berurutan. Untuk kelompok pertama ganjil dengan pasangan kelompok kedua, setiap pasangan dijumlahkan dan hasilnya diurutkan dari hasil bilangan terbesar sampai terkecil, setelah itu dilabeli pada  $p_{42}, p_{41}, p_{32}, p_{31}, p_{22}, p_{21}, p_{12}, p_{11}$  secara berurutan.



Gambar 4.4 Konstruksi Pemberian Label Simpul pada  $G = F_4 \odot P_2$

Dapat dilihat bahwa pelabelan Simpul pada graf diatas membentuk pelabelan simpul magic.

Langkah Kedua, akan diberikan pola pemberian label pada sisi.

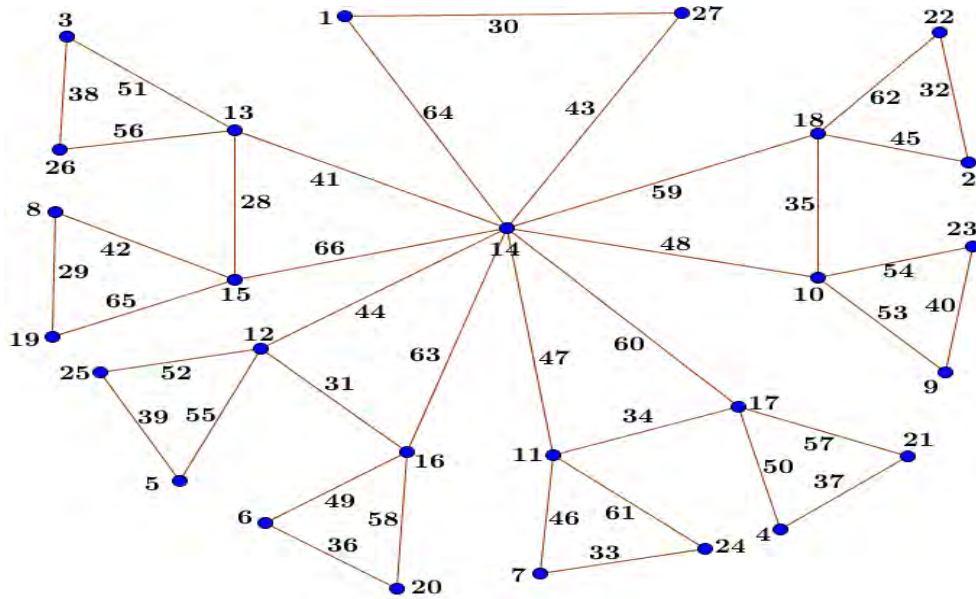
1. Setelah simpul telah selesai dilabeli, langkah selanjutnya adalah memberi label pada sisi. Pada pelabelan sisi, label untuk  $|G| + 1$  selalu berada pada sisi atas atau sisi  $s$ .
2. Pemberian label  $|G| + 1$  bersifat acak atau random, maksudnya dapat dimulai pemberian untuk label pertama pada sisi  $s$  manapun.
3. Setelah pemberian label pada sisi  $s$  selesai, label berikutnya dapat dipilih pada sisi  $u$  atau  $t$ , tetapi dengan syarat harus mengikuti alur pelabelan pada sisi  $s$  dengan dimulai dari alur pemberian label pada sisi  $s$  yang terkecil sampai terbesar.
4. Kemudian untuk sisi terakhir, label yang diberikan berlawanan dengan alur pemberian label pada sisi  $s$ . Pemberian label dimulai dari alur pemberian label pada sisi  $s$  yang terbesar sampai dengan terkecil.

Akan diberikan satu contoh untuk pelabelan sisi

Tinjau gambar 4.3

Diketahui:  $G = F_4 \odot P_2$ , dengan  $m = 4, n = 2$ .

Pemberian label  $|G| + 1$ , yaitu  $27 + 1 = 28$  akan diberikan pada sisi  $s$  secara random atau acak. Setelah sisi  $s$  telah dilabeli, label berikutnya diberikan pada sisi  $u$  dan setelah itu sisi  $t$ , sesuai dengan aturan yang diberikan.

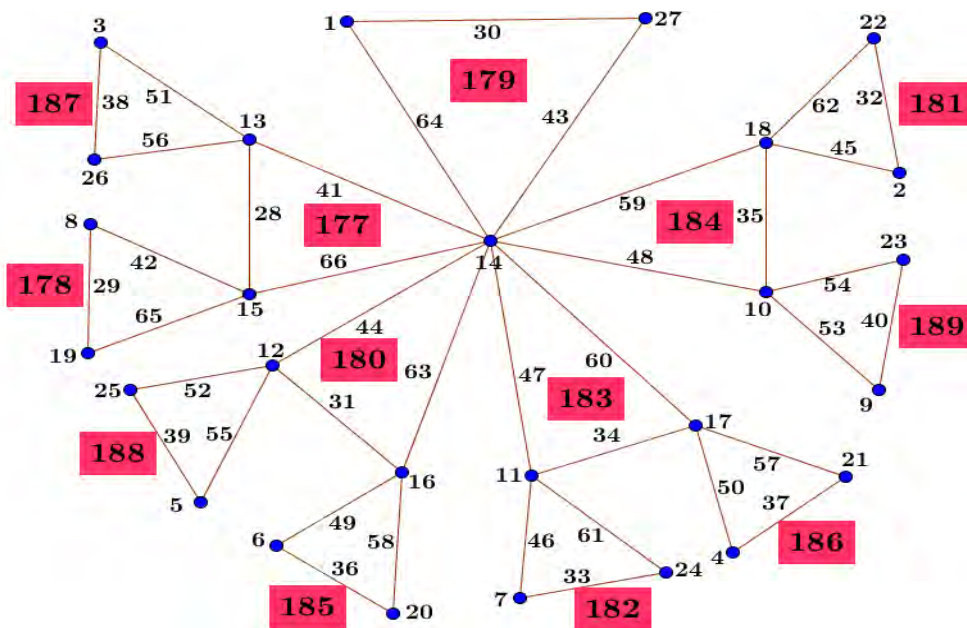


Gambar 4.5 Konstruksi Pemberian Label Sisi pada  $G = F_4 \odot P_2$

Langkah Ketiga, untuk bobot muka bidang didapat dari penjumlahan simpul dan sisi. Setelah didapatkan pola untuk menentukan label pada simpul dan sisi, maka tiap simpul dan sisi pada tiap-tiap muka bidang dijumlahkan.

Sebagai contoh, tinjau kembali bentuk graf  $G = F_4 \odot P_2$ .

Pada contoh bentuk  $F_4 \odot P_2$ , dapat dilihat untuk bobot tiap muka bidang membentuk barisan aritmatika dengan beda = 1



Gambar 4.6 Pelabelan Total Super Antimagic pada  $d$ -muka bidang,  $G = F_4 \odot P_2$

sehingga  $G = F_m \odot P_2$  memiliki pelabelan total super antimagic pada  $d$ -muka bidang, dengan  $d = 1$

#### **Teorema 4.2**

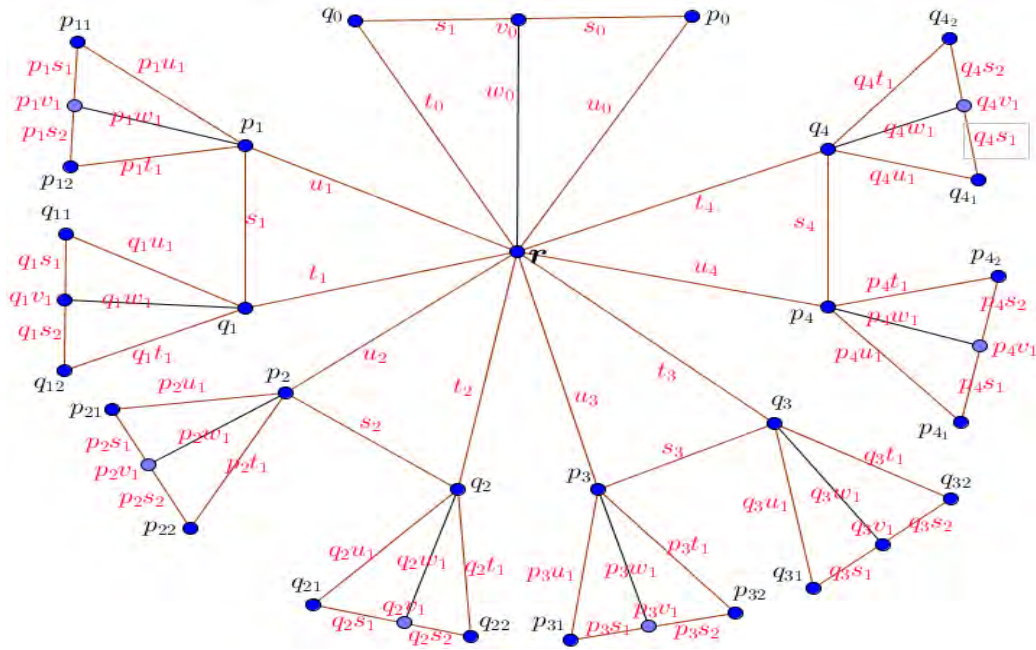
*Diberikan  $F_m$  adalah graf friendship dengan  $m$  bilah dan  $P_3$  adalah lintasan order 2. Jika  $G = F_m \odot P_3$ , maka  $G$  memiliki pelabelan total super antimagic pada  $d$ -muka bidang, untuk setiap nilai  $m, n \in \text{bilangan asli}$  dengan  $m \geq 3$  dengan  $d = 1$ .*

bukti.

Langkah pertama, akan diberikan pola pelabelan simpul pada  $G = F_m \odot P_2$  (tinjau gambar 4.3)

1. Untuk melabeli simpul, akan ditentukan dulu nilai pada simpul pusat  $r$  dengan mencari nilai dari  $\frac{|G|+1}{2}$  pada  $F_m \odot P_2$ .
2. Melabeli simpul pada graf friendship. Untuk  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_m$  diberi label  $\frac{|G|+1}{2} - 1, \frac{|G|+1}{2} - 2, \frac{|G|+1}{2} - 3, \dots, \frac{|G|+1}{2} - l$ . Untuk  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_m$  diberi label  $\frac{v+1}{2} + 1, \frac{v+1}{2} + 2, \frac{v+1}{2} + 3, \dots, \frac{v+1}{2} + l$
3. Seperti pada pelabelan simpul pada  $F_m \odot P_2$ , pola pemberian label pada simpul selanjutnya tetap menggunakan pembagian bilangan berdasarkan dua kelompok dan dilabeli sesuai dengan aturan pada teorema 4.1, tetapi dengan syarat bilangan pada kelompok pertama selalu dilabeli pada simpul  $v$  dan bilangan pada kelompok kedua dilabeli pada simpul  $m_1$  atau  $m_2$ .
4. Tentukan nilai  $|G|$  pada  $F_m \odot P_3$ , Sehingga barisan bilangan yang terakhir dilabeli pada simpul yang tersisa. Perlu untuk dijumlahkan terlebih dahulu simpul  $r + v_0, p_1 + p_1 v_1, q_1 + q_1 v_1, p_2 + p_2 v_1, q_2 + q_2 v_1, \dots, p_m + p_m v_1, q_m + q_m v_1$  (tinjau gambar 4.2). Pelabelan dimulai secara terurut dimulai dari nilai terbesar sampai terkecil pada hasil penjumlahan simpul.

Akan diberikan contoh untuk pelabelan simpul



Gambar 4.7 Graf  $G = F_4 \odot P_3$

Diberikan contoh untuk pelabelan pada graf  $G = F_4 \odot P_3$  pada gambar 4.7.

pada langkah pertama, akan dilakukan pelabelan simpul untuk graf  $G = F_4 \odot P_2$  sesuai dengan langkah pada teorema 4.1

Tinjau gambar 4.3 dan langkah pertama untuk pelabelan simpul pada teorema 4.1.

Diketahui:  $G = F_4 \odot P_2$ , dengan  $m = 4, n = 2$

$$\begin{aligned}
 |G| &= 2mn + 2m + n + 1 \\
 &= (2 \times 4 \times 2) + (2 \times 4) + 2 + 1 \\
 &= 16 + 8 + 2 + 1 \\
 &= 27.
 \end{aligned}$$

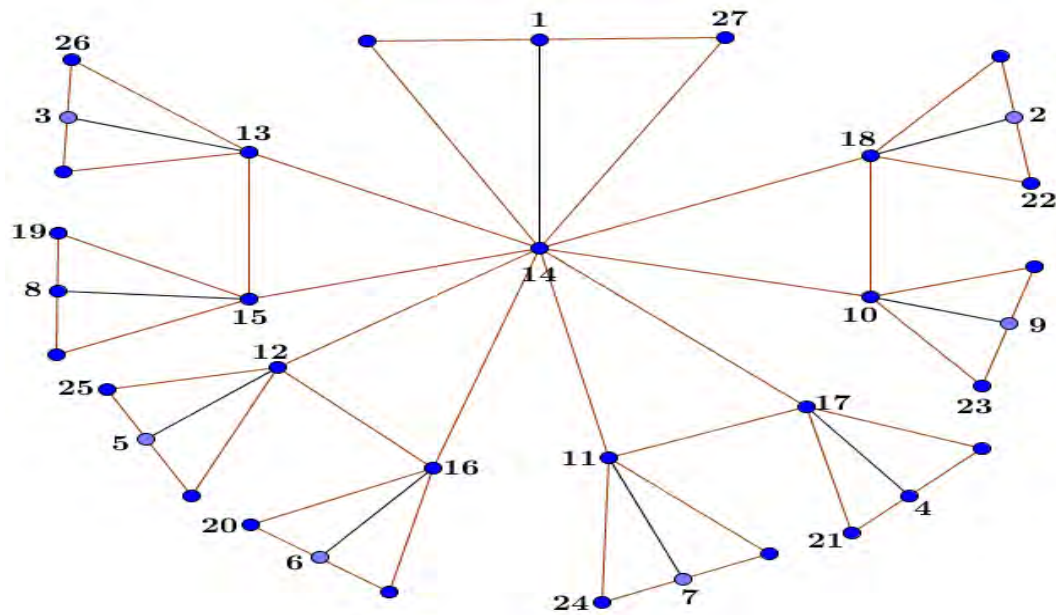
$$\text{Simpul tengah} = \frac{|G|+1}{2} = \frac{27+1}{2} = \frac{28}{2} = 14$$

karena  $m = 4$ , maka label untuk titik  $p_1, p_2, p_3, p_4$  secara berurutan adalah  $14 - 1, 14 - 2, 14 - 3, 14 - 4 = 13, 12, 11, 10$  dan label untuk  $q_1, q_2, q_3, q_4$  secara berurutan adalah  $14 + 1, 14 + 2, 14 + 3, 14 + 4 = 15, 16, 17, 18$ .

Kelompok pertama = 2,3,4,5,6,7,8,9 dan kelompok kedua = 19,20,21,22,23,24,25,26.

Dengan menggunakan aturan pelabelan simpul pada teorema 4.1 dan setiap bilangan pada kelompok pertama selalu dilabeli pada simpul  $v$  dan setiap bilangan

pada kelompok kedua dilabeli pada simpul  $m_1$  atau  $m_2$ , maka didapatkan hasil sebagai berikut.



Gambar 4.8 Konstruksi Pelabelan Simpul yang Pertama pada  $G = F_4 \odot P_3$

Setelah itu, tentukan nilai  $|G|$  pada  $F_4 \odot P_3$

$$\begin{aligned}
 |G| &= 2mn + 2m + n + 1 \\
 &= (2 \times 4 \times 3) + (2 \times 4) + 3 + 1 \\
 &= 24 + 8 + 3 + 1 \\
 &= 36
 \end{aligned}$$

Diketahui barisan bilangan yang tersisa adalah 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36.

Jumlahkan setiap label sesuai dengan aturan ke-4.

$$14 + 1 = 15$$

$$13 + 3 = 16$$

$$15 + 8 = 23$$

$$12 + 5 = 17$$

$$16 + 6 = 22$$

$$11 + 7 = 18$$

$$17 + 4 = 21$$

$$10 + 9 = 19$$

$$18 + 2 = 20$$

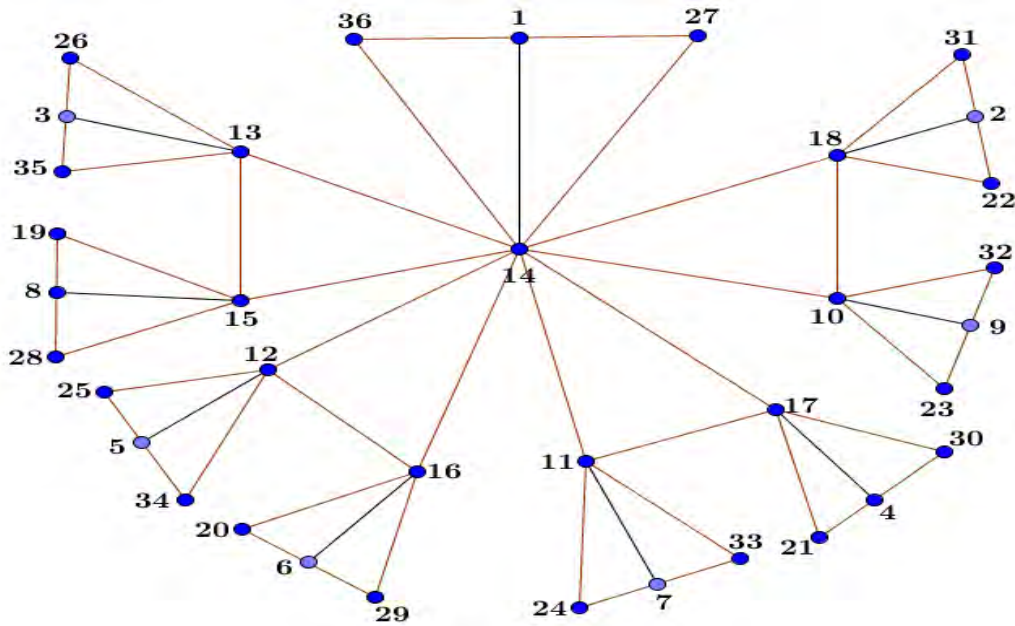
kemudian diurutkan dari penjumlahan label yang jumlahnya terbesar sampai terkecil, sehingga didapatkan urutannya sebagai berikut.

(15,8), (16,6), (17,4), (18,2), (10,9), (11,7), (12,5), (13,3), (14,1)

sehingga barisan bilangan 28,29,30,31,32,33,34,35,36 dilabeli pada simpul yang bersebelahan dengan

(15,8), (16,6), (17,4), (18,2), (10,9), (11,7), (12,5), (13,3), (14,1)

hasilnya sebagai berikut.



Gambar 4.9 Konstruksi Pelabelan Simpul Seluruhnya pada  $G = F_4 \odot P_3$

Langkah Kedua, akan diberikan pola pelabelan pada  $G = F_4 \odot P_3$  untuk pelabelan sisi (tinjau gambar 4.2)

1. Setelah semua simpul telah dilabeli, maka dilanjutkan dengan melabeli sisi. Untuk  $|G| + 1, |G| + 2, |G| + 3, \dots, |G| + x$  dilabeli secara berurutan pada sisi  $t_m, t_{m-1}, t_{m-2}, \dots, t_1$  pada graf friendship.
2. Untuk  $|G| + x + 1, |G| + x + 2, |G| + x + 3, \dots, |G| + x + j$  dilabeli secara berurutan pada sisi

$w_0, q_m w_1; p_m w_1, q_{m-1} w_1; p_{m-1} w_1, q_{m-2} w_1; p_{m-2} w_1, \dots, q_1 w_1; p_1 w_1.$

3. Selanjutnya untuk  $(|G| + x + j) + 1, (|G| + x + j) + 2, \dots, (|G| + x + j) + k$  dilabeli secara berurutan pada

$p_1 s_2, p_1 s_1; q_1 s_2, q_1 s_1; p_2 s_2, p_2 s_1; q_2 s_2, q_2 s_1, \dots, q_m s_2, q_m s_1; p_m s_2, p_m s_1;$



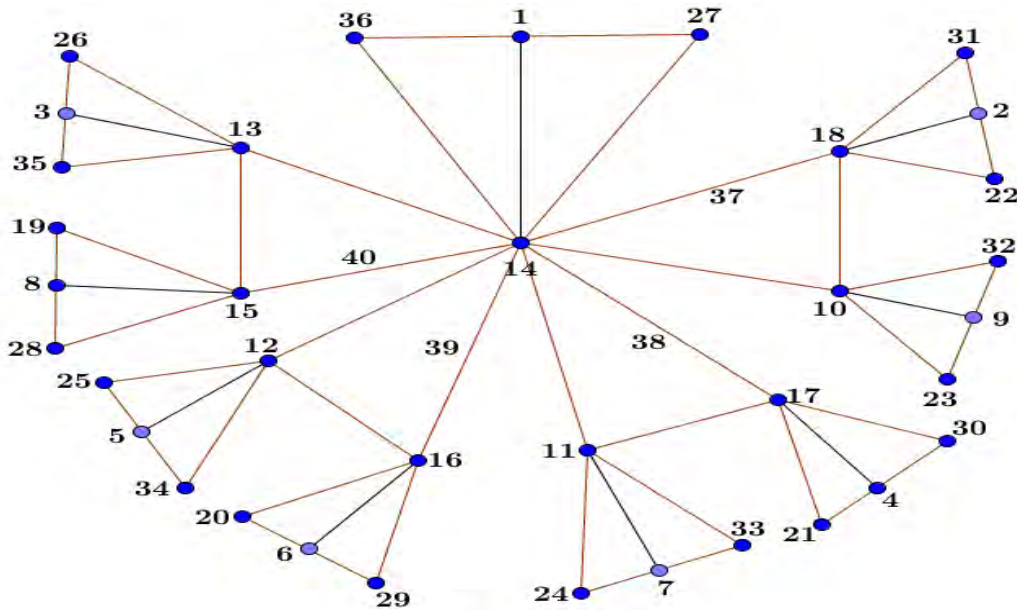
$s_0, s_1$

4. Untuk  $(|G| + x + j + k) + 1, (|G| + x + j + k) + 2, (|G| + x + j + k) + 3, \dots, (|G| + x + j + k) + o$ , dilabeli pada sisi graf friendship  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_m$  secara berurutan
5. Kemudian untuk  $(|G| + x + j + k + o) + 1, (|G| + x + j + k + o) + 2, (|G| + x + j + k + o) + 3, \dots, (|G| + x + j + k + o) + y$ , dilabeli pada sisi graf friendship  $u_m, u_{m-1}, u_{m-2}, u_{m-3}, \dots, u_1$  secara berurutan.
6. Terakhir, untuk  $(|G| + x + j + k + o + y) + 1, (|G| + x + j + k + o + y) + 2, (|G| + x + j + k + o + y) + 3, \dots, |G| + e$ , dilabeli pada sisi  $t_0; u_0, p_m t_1; p_m u_1, q_m t_1; q_m u_1, p_{m-1} t_1; p_{m-1} u_1, q_{m-1} t_1; q_{m-1} u_1 \dots, p_1 t_1 p_q u_1; q_1 t_1; q_1 t_1$

Diberikan contoh untuk pelabelan sisi, dengan menggunakan graf yang sama  $G = F_4 \odot P_3$

Tinjau gambar 4.7

label untuk sisi bagian pertama  $t_4, t_3, t_2, t_1$  adalah 37,38,39,40

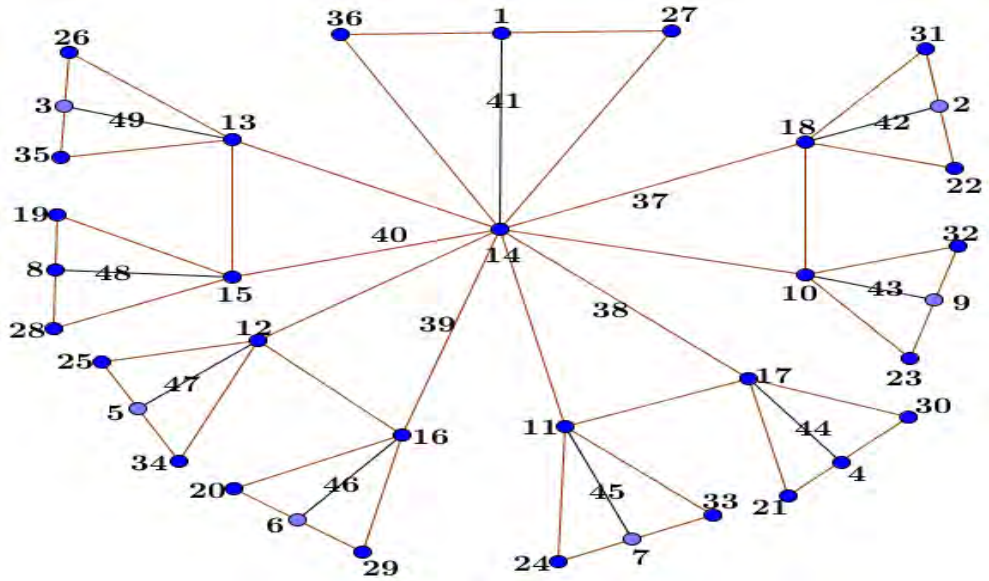


Gambar 4.10 Konstruksi Pelabelan Sisi bagian pertama pada  $F_4 \odot P_3$

Selanjutnya label untuk sisi bagian kedua

$w_0, q_4 w_1; p_4 w_1, q_3 w_1; p_3 w_1, q_2 w_1; p_2 w_1, q_1 w_1; p_1 w_1$  dilabeli dengan 41,42,43,44,45,46,47,48,49





Gambar 4.11 Konstruksi Pelabelan Sisi Bagian Kedua pada  $F_4 \odot P_3$

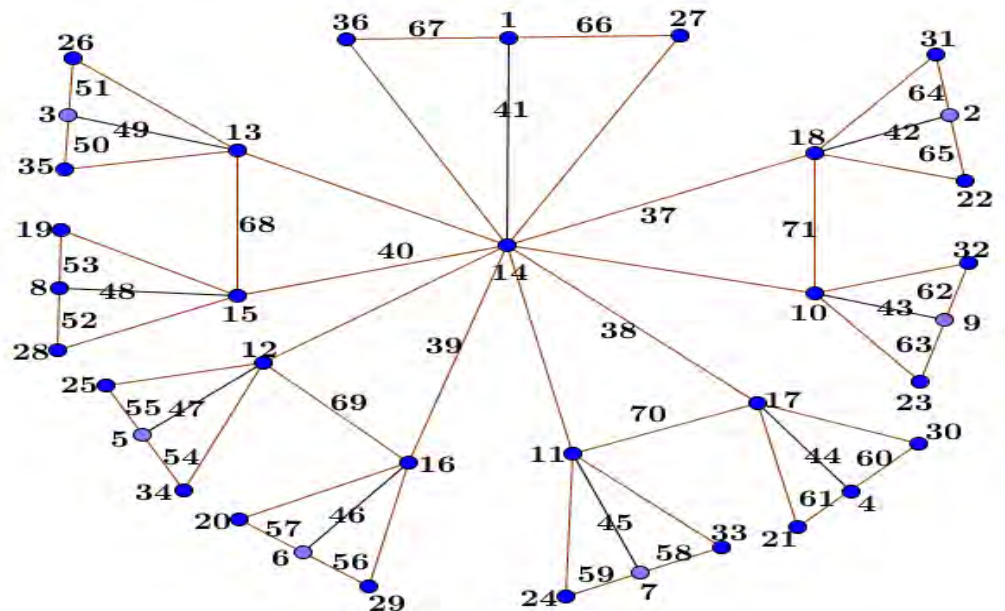
Kemudian, label untuk sisi bagian ketiga

$p_1s_2, p_1s_1; q_1s_2, q_1s_1; p_2s_2, p_2s_1; q_2s_2, q_2s_1; p_3s_2, p_3s_1; q_3s_2, q_3s_1; p_4s_2, p_4s_1;$

$s_0, s_1$  dilabeli dengan

50,51; 52,53; 54,55; 56,57; 58,59; 60,61; 62,63; 64,65; 66,67;

dan untuk sisi  $s_1s_2, s_3s_4$  dilabeli dengan 68,69,70,71 secara beraturan.

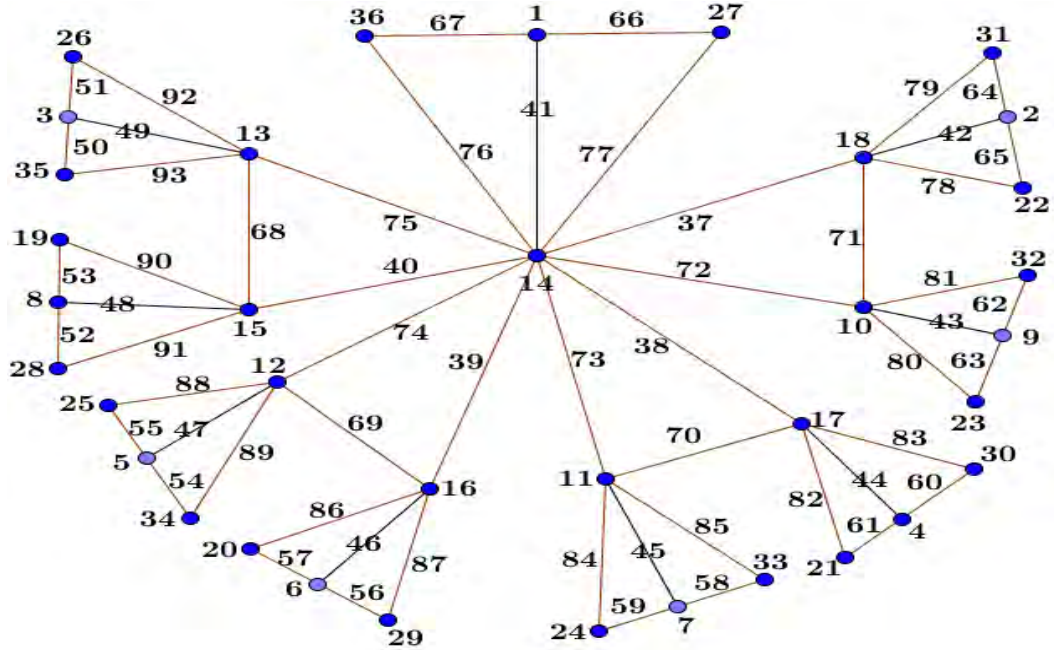


Gambar 4.12 Konstruksi Pelabelan Sisi Bagian Ketiga pada  $F_4 \odot P_3$

Selanjutnya untuk sisi  $u_4, u_3, u_2, u_1$ , dilabeli dengan 72,73,74,75. Dan yang terakhir untuk sisi

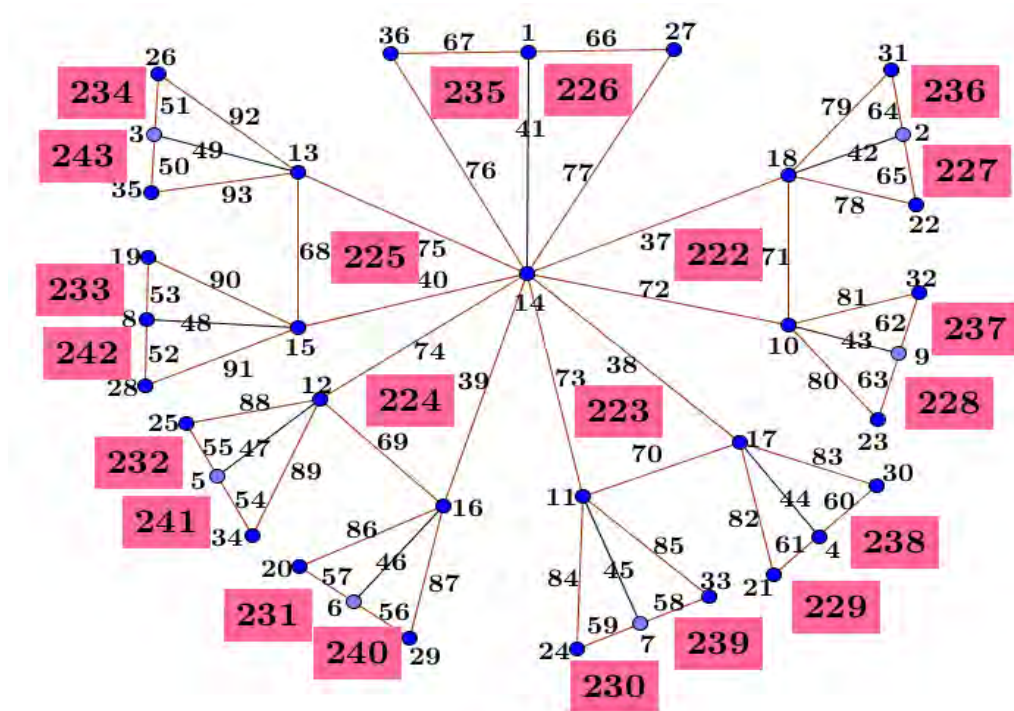
$t_0; u_0, q_4u_1, q_4t_1; p_4u_1, p_4t_1; q_3u_1, q_3t_1; p_3u_1, p_3t_1; q_2u_1, q_2t_1; p_2u_1, p_2t_1; q_1u_1, q_1t_1; p_1u_1, p_1t_1$  secara berurutan adalah

76,77,78,79,80,81,82,83,84,85,86,87,88,89,90,91,92,93



Gambar 4.13 Konstruksi Pelabelan Sisi Seluruhnya pada  $F_4 \odot P_3$

Langkah ketiga, untuk bobot muka bidang didapat dari penjumlahan simpul dan sisi. Setelah didapatkan pola untuk menentukan label pada simpul dan sisi, maka tiap simpul dan sisi pada tiap-tiap muka bidang dijumlahkan.



Gambar 4.14 Pelabelan Total Super Antimagic pada  $d$ -Muka Bidang,  $G = F_4 \odot P_3$

Pada contoh bentuk  $F_4 \odot P_3$ , dapat dilihat untuk bobot tiap muka bidang membentuk barisan aritmatika dengan beda = 1  
 sehingga  $G = F_m \odot P_3$  memiliki pelabelan total super antimagic pada  $d$ -muka bidang, dengan  $d = 1$

## BAB 5

### KESIMPULAN DAN SARAN

#### 5.1 Kesimpulan

Dari penelitian ini, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut.

1. Graf  $F_m \odot P_n$  dengan  $m \geq 3$  dan  $n = 2$  dan  $n = 3$  memiliki pelabelan total super antimagic pada  $d$ -muka bidang.
2. Nilai  $d$  pada Graf  $F_m \odot P_n$  dengan  $m \geq 3$  dan  $n = 2$  dan  $n = 3$  adalah  $d \leq 15$
3. Nilai  $d$  yang didapatkan pada pelabelan Graf  $F_m \odot P_n$  dengan  $m \geq 3$  dan  $n = 2$  dan  $n = 3$  adalah  $d = 1$

#### 5.2 Saran

- 1 Untuk jenis pelabelan muka bidang lainnya, seperti jenis pelabelan magic, gracefull, harmoni, dan sebagainya pada graf  $F_m \odot P_n$  dengan  $m \geq 3$  dan  $n = 2$  dan  $n = 3$  ,pastinya memiliki pola pelabelan yang berbeda. Hal ini menjadi masalah untuk diselesaikan kemudian, disamping pelabelan untuk  $d \neq 1$  yang belum peneliti selesaikan.
- 2 Untuk pelabelan total super antimagic pada  $d$ -muka bidang dari hasil korona graf friendship dan lintasan masih belum ditemukan untuk  $F_m \odot P_n$  dimana  $n \geq 4$ , dan menjadi masalah yang belum peneliti selesaikan

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Arumugam, S., Nalliah, M : *Super  $(a, d)$ -edge total labelings of friendship graphs*. Australasian urnal of combinatorics, (2012)
- [2] M, Bacca., Y., Lin., M, Miller., M. Z. Youssef. *Edge-antimagic graphs*. Sience Direct, (2007)
- [3] Gallian, J.: A dynamic survey of graph labeling. The Electronic Journal of combinatorics 17, (2014)
- [4] M, Bacca., Oudone, Phanalasy., Ryan, J., Fenovcikova, A, J., Sillasen, A, A : *Totally antimagic graphs*, (2014).
- [5] Tilukay, M. I., Salman, A. N. M., Elviyenti, M. : *On super  $d$ -face antimagic total labelings of the corona product of a tree with  $r$  copies of a path*. AIP Conf. Proc. 1450, 218 (2012)



## **BIOGRAFI PENULIS**

Peneliti yang bernama lengkap Vicardy Kempa dengan panggilan ardy lahir di Ambon pada tanggal 24 maret 1992 dari pasangan suami-istri Bapak Rudolf Kempa dan Theresia Laurens. Peneliti adalah anak kedua dari tiga bersaudara. Peneliti sekarang bertempat tinggal di Rumah Tiga, Ambon.

Pendidikan yang ditempuh oleh peneliti yaitu SD Negeri Teladan Ambon dan lulus tahun 2003, SMP Negeri 4 Ambon dan lulus tahun 2006, SMA 2 YPK Jatim Malang dan lulus tahun 2009, S1 Jurusan Matematika FMIPA Universitas Pattimura Ambon dan lulus tahun 2014. Penulis melanjutkan studi S2 di Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya pada tahun 2014 dan menyelesaikan sidang tesis pada tanggal 19 juli 2016.